ÜBER UNSTETIGE FLÜSSIGKEITSBEWEGUNGEN UM VORGEGEBENE PROFILE

INAUGURALDISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
GENEHMIGT VON DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU BERLIN

VON

JOHANN FRIEDRICH SCHULTZE
AUS BERLIN-NEUKÖLLN

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 23. NOVEMBER 1938
TAG DER PROMOTION: 31. JANUAR 1939

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

N 109

REFERENTEN:
PROFESSOR DR. A. KLOSE
PROFESSOR DR. L. BIEBERBACH

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Sonderabdruck aus den „Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin“ / Band 4

Einleitung.

Eines der wichtigsten Probleme der Hydrodynamik ist auch heute noch die Erklärung und Berechnung des Widerstandes, den ein geradlinig gleichförmig durch eine ruhende Flüssigkeit bewegter Körper erfährt. HELMHOLTZ und STOKES suchten dieses Problem durch eine einfache Idealisierung im Rahmen der klassischen Hydrodynamik zu lösen. Bei der Fahrt eines Schiffes entsteht ein Kielwasser. Diese Erfahrungstatsache ist für HELMHOLTZ und STOKES die Grundlage zur Beseitigung des Paradoxons von d'ALEMBERT. Sie nehmen an, daß bei der Bewegung eines Körpers durch eine ruhende Flüssigkeit ein sich bis ins Unendlichferne erstreckendes Kielwasser entsteht. Dieses unendliche Kielwasser wird als Totwassergebiet vorausgesetzt. Kielwasser und Körper sind fest miteinander verbunden und bewegen sich wie ein einheitlicher Körper. Daher wird das Kielwasser innerhalb der Flüssigkeit von einer Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit begrenzt. Für eine ebene Bewegung dieser Art hat LEVI-CIVITA 1907 eine formal elegante Methode zur Berechnung der Strömung und des Widerstandes angegeben. Vorausgesetzt wird bei dieser Methode, daß die komplexe Geschwindigkeit w als Funktion des komplexen Potentials f bekannt ist. Aber gerade die Bestimmung dieser Funktion $w(f)$ für ein vorgegebenes Profil ist mit sehr großen Schwierigkeiten verknüpft. So blieb nur der unbefriedigende indirekte Weg, zu gegebenem $w(f)$ Strömung und Profil aufzusuchen. Einen wesentlichen Fortschritt zur direkten Lösung des Problems brachte erst eine Arbeit von QUARLERI 1931. QUARLERI stellte für den Kreisbogen eine nichtlineare Integralgleichung auf, deren Lösung zu der gesuchten Funktion $w(f)$ führt. Die von QUARLERI gegebene Lösung dieser Integralgleichung ist jedoch falsch, so daß also die exakte Lösung des Problems für den Kreisbogen noch fehlt. Hier knüpft nun die vorliegende Arbeit an. Es kam erstens darauf an, die Gleichung von QUARLERI in der wünschenswerten Allgemeinheit an die ursprüngliche Methode von LEVI-CIVITA anzuschließen und so diese Methode durch eine Vorschrift zur Berechnung des Widerstandes vorgegebener Profile zu vervollständigen. Zweitens handelte es sich darum, einen Weg aufzuzeigen, der wenigstens zur näherungsweisen Bestimmung des Widerstandes nach dieser Vorschrift führen kann. Im folgenden wird am Beispiel des Kreisbogens

gezeigt, wie sich die Gleichung von QUARLERI auswerten läßt. Das eingeschlagene Näherungsverfahren, das beliebig verfeinert werden kann, ist ein Iterationsverfahren. Es ist schon in seiner einfachsten Form bei erträglicher Rechenarbeit geeignet, einen Überblick über die Lösungen der erwähnten Integralgleichung und damit auch über die Strömungen um einen Kreisbogen zu geben.

Dementsprechend enthält der erste Abschnitt der vorliegenden Arbeit eine Darstellung der Methode von LEVI-CIVITA. Im zweiten Abschnitt wird die allgemeine Gleichung von QUARLERI und das sich daraus ergebende Verfahren zur Widerstandsberechnung gegeben, während der dritte Abschnitt Anwendung und Ergebnisse dieses Verfahrens für kreisbogenförmige Profile bringt.

Herrn Prof. Dr. KLOSE möchte ich auch an dieser Stelle für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit und die freundliche fördernde Anteilnahme, die er dem Entstehen derselben entgegengebracht hat, meinen besten Dank aussprechen.

I. Die Methode von Levi-Civita.

Das hydrodynamische Problem kann folgendermaßen formuliert werden (vgl. Abb. 1):

Der Körper C bewegt sich geradlinig und gleichförmig mit der Geschwindigkeit 1 durch die unbegrenzte, inkompressible, ideale Flüssigkeit der Dichte 1.

Mit dem Körper C ist eine sich bis zum Unendlichfernen erstreckende Flüssigkeitssäule B, das Kielwasser, fest verbunden, so daß sich Körper und Kielwasser wie ein einheitlicher Körper bewegen.

Die Begrenzung des Kielwassers gegen die Flüssigkeit ist also eine Unstetigkeitsfläche des Geschwindigkeitsfeldes.

Es wird angenommen, daß die aus dieser Unstetigkeitsfläche und dem nicht an das Kielwasser grenzenden Teil der Oberfläche des Körpers C bestehende Fläche eine stetig veränderliche Tangentialebene besitzt.

Der Druck im Kielwasser soll konstant sein, d. h. das Kielwasser soll ein Totwassergebiet sein. Der Druck im ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum ist stetig. Insbesondere ist also der Druck auch längs der Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit stetig. Das gibt als erste Randbedingung die Bedingung, daß der Druck auf der Kielwasserbegrenzung stetig und konstant ist. Die zweite Grenzbedingung folgt aus der Betrachtung der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens

relativ zu dieser Fläche. Die Komponente dieser Geschwindigkeit in Richtung der Flächennormalen muß Null sein.

In dem weder von C noch von B eingenommenen Teil des Raumes, dem Außenraum A, ist die Bewegung der Flüssigkeit in bezug auf ein mit dem Körper C fest verbundenes Koordinatensystem stationär, stetig und wirbelfrei. Für ein derartiges Bezugssystem geht die Bewegung der Flüssigkeit im Unendlichfernen in eine gleichförmige Parallelströmung über. Es gibt einen einzigen Staupunkt.

Die Strömung um den Körper C und der Widerstand, den C erfährt, sind unter diesen Voraussetzungen zu berechnen.

Dieses Problem behandelt Levi-Civita [1]) für den Fall der ebenen Strömung um konvexe Profile.

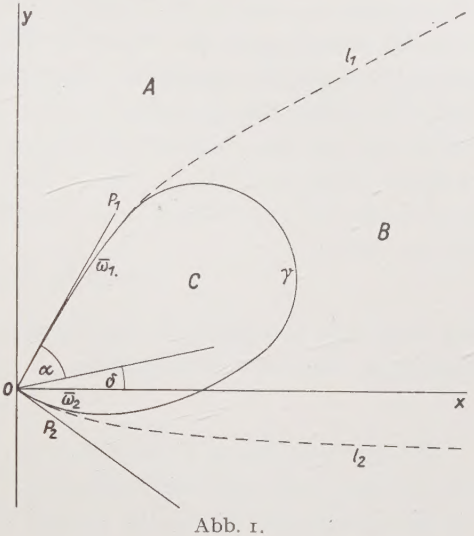

Abb. 1.

Es wird ein mit C fest verbundenes Bezugssystem gewählt, das in der Ebene der Strömung liegt. Der Ursprung O dieses Koordinatensystems (vgl. Abb. 1) wird so in den Staupunkt gelegt, daß die positive x-Achse die Richtung der Strömung im Unendlichfernen hat. Das Gebiet B des Kielwassers soll die so festgelegte positive x-Achse ganz enthalten. Besitzt die Kontur γ von C eine stetige Tangente, so kann bei geeigneter Orientierung von C zur Strömung ein beliebiger Punkt von γ Staupunkt sein. Levi-Civita läßt aber auch Konturen zu, die eine zur Strömung gewendete Ecke besitzen (Abb. 1), und legt in diesem Falle den Staupunkt in die Ecke. Es ist jedoch hervorzuheben, daß eine derartige Festlegung des Staupunktes eine wesentliche Auswahl unter den hydrodynamisch möglichen Lösungen bedeutet. Wenn nämlich die Ecke in einem Totwassergebiet liegt, kann sehr wohl ein anderer Punkt Staupunkt sein.[2])

1) T. Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza*. Rendiconti Circolo Matematico Palermo 23 (1907), S. 1—37.

2) a) H. Villat, *Sur le changement d'orientation d'un obstacle dans un courant fluide et sur quelques questions connexes*. Annales Toulouse (3) 5 (1913), S. 375—404.

b) Ders., *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*. Paris 1920, S. 41.

c) Ders., *Leçons sur l'Hydrodynamique*. Paris 1929, S. 76.

Einen Überblick über die Verhältnisse in der x, y-Ebene gibt Abb. 1. Das Kielwasser löst sich in den Punkten P_1 und P_2 von der Kontur γ des Körpers C ab und wird innerhalb der Flüssigkeit von den freien Linien l_1 und l_2 begrenzt. Der aus den beiden zum Profil gehörenden Bogen $\overset{\frown}{OP_1} = \bar{\omega}_1$ und $\overset{\frown}{OP_2} = \bar{\omega}_2$ und den freien Linien l_1 und l_2 bestehende Linienzug s besitzt mit der einzigen möglichen Ausnahme des Bugpunktes O überall eine stetige Tangente. Die Krümmung der Profilbogen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_2$ sei überall endlich und stetig. Die Geschwindigkeit der Strömung ist im Innern des Kielwassers gleich Null. Im Außenraum A ist die Bewegung der Flüssigkeit stationär, stetig und wirbelfrei. Sie geht im Unendlichfernen in eine gleichförmige Parallelströmung mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der positiven x-Achse über. Ist also u die x- und v die y-Komponente der Geschwindigkeit und bezieht sich der Index ∞ auf das Unendlichferne, so hat man

$$u_\infty = 1, \quad v_\infty = 0.$$

In allen von O verschiedenen Punkten von A gilt für den absoluten Betrag V der Geschwindigkeit

$$V > 0.$$

Die mathematische Behandlung der ebenen Potentialströmung wird durch den Übergang zur komplexen z-Ebene erleichtert. Führt man in der bekannten Weise das komplexe Geschwindigkeitspotential $f(z)$ und die komplexe Geschwindigkeit $w(z)$ im Punkte $z = x + iy$ ein, so hat man

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{df}{dz} = w = u - iv & (|w| = V), \\ f = \varphi + i\psi, \\ d\varphi = u\,dx + v\,dy, \\ d\psi = -v\,dx + u\,dy. \end{cases}$$

Dabei ist φ das in dem einfach zusammenhängenden Gebiet A eindeutige und in jedem in endlicher Entfernung gelegenen Punkte von A auch endliche und stetige Geschwindigkeitspotential, ψ die Stromfunktion. Die noch unbestimmten Konstanten in diesen beiden Funktionen werden durch die Bestimmung $f(0) = 0$ festgelegt. Die letzten beiden Gleichungen zeigen zusammen mit $u_\infty = 1$ und $v_\infty = 0$, daß sowohl $|\varphi|$ als auch $|\psi|$ unbegrenzt wächst, wenn man sich von O unbegrenzt in einer Richtung, die weder zur x- noch zur y-Achse parallel ist, entfernt. Das Verhalten von φ und ψ auf dem Rande s von A folgt aus den hydrodynamischen Bedingungen, die dort erfüllt

sein müssen. Längs s muß nämlich die Normalkomponente der Geschwindigkeit Null sein, d. h. es muß, wenn $\frac{dx}{ds}$ und $\frac{dy}{ds}$ die Richtungskosinus von s in einem beliebigen Punkte sind,

$$-v\frac{dx}{ds}+u\frac{dy}{ds}=0$$

sein. Nach der letzten der Gleichungen (1) folgt daraus $\frac{d\psi}{ds}=0$ und weiter wegen $\psi=0$ in O

$$\psi=0 \text{ in jedem Punkte von } s.$$

s muß also ein Stück der Stromlinie $\psi=0$ sein. Dagegen wächst φ über alle Grenzen, wenn man sich auf s von O in der einen oder in der anderen Richtung entfernt; denn auf der Stromlinie s ist

$$\frac{dx}{ds}=\frac{u}{V}, \qquad \frac{dy}{ds}=\frac{v}{V}$$

und

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=V>0,$$

wo auf l_1 und l_2 sogar $V=1$ ist. Das ergibt sich aus der Stetigkeit des Drucks längs der freien Linien l_1 und l_2. p und V sind verknüpft durch die Beziehung

$$p=-\tfrac{1}{2}V^2+\text{const.}$$

Herrscht in dem in Ruhe befindlichen Kielwasser der konstante Druck p_0, so ergibt der Vergleich der Drucke auf beiden Seiten der freien Linien

$$p_0=p=-\tfrac{1}{2}V^2+\text{const.}$$

Auf den freien Linien ist also der Betrag V der Geschwindigkeit konstant, und da sich die freien Linien ins Unendlichferne, wo die Geschwindigkeit den Betrag 1 hat, erstrecken, hat man

$$V=1 \text{ auf } l_1 \text{ und } l_2.$$

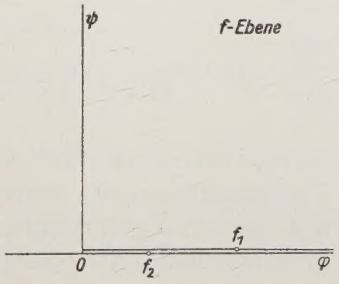

Abb. 2.

Veranschaulicht wird das allen diesen Bedingungen genügende komplexe Potential f durch die umkehrbar eindeutige Abbildung des Gebietes A der z-Ebene auf die längs der positiven reellen Achse aufgeschnittene f-Ebene (Abb. 2). Bei dieser Abbildung entspricht dem Nullpunkt der z-Ebene derjenige der f-Ebene, dem Linienzuge $\overline{\omega_1 l_1}$ der obere Rand des Schnittes und entsprechend dem aus $\overline{\omega_2}$ und l_2 bestehenden Linienzuge der untere Rand. Sind f_1 bzw. f_2 die Werte des

Potentials in den Ablösungsstellen P_1 bzw. P_2, so wird der Profilbogen $\overline{\omega}_1$ auf die Strecke von O bis f_1 des oberen Randes und entsprechend $\overline{\omega}_2$ auf die zum unteren Rand gehörige Strecke Of_2 abgebildet.

LEVI-CIVITAS Vorgehen besteht nun aus vier Schritten. Der erste Schritt ist der Übergang von der z- zur f-Ebene. Es wird an Stelle von z die unabhängige Variable f eingeführt. Das ist möglich, weil die Abbildung der z-Ebene auf die f-Ebene umkehrbar eindeutig ist. Mittels $z(f)$ kann man sich alle in Betracht kommenden Größen der z-Ebene als Funktionen von f dargestellt denken. Insbesondere wird w als bekannte Funktion von f angesehen.

Beim zweiten Schritt wird der Logarithmus der komplexen Geschwindigkeit eingeführt. LEVI-CIVITA setzt

$$w = e^{-i\omega}, \quad \omega = \vartheta + i\tau. \tag{2}$$

ϑ ist der Winkel, den der Vektor der Geschwindigkeit $u + iv$ im Punkte $z(f)$ mit der positiven x-Achse bildet, gezählt zwischen 0 und π, und zwar positiv im Gegenzeigersinne.

$$e^{\tau} = |w| = V$$

gibt den absoluten Betrag der Geschwindigkeit. $\omega(f)$ ist, wenn man noch $\omega = 0$ für $f = \infty$ $(w = 1)$ festsetzt, in der aufgeschnittenen f-Ebene eindeutig, mit Ausnahme des Punktes $f = 0$ endlich und stetig auch auf den Rändern des Schnittes. Wegen $V = 1$ nimmt ω in den den freien Linien entsprechenden Punkten der φ-Achse reelle Werte an.

Drittens geht LEVI-CIVITA durch die Abbildung

$$f = a^2\left[\cos\sigma_0 - \tfrac{1}{2}\left(\zeta + \tfrac{1}{\zeta}\right)\right]^2 \tag{3}$$

mit

$$a^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}\right), \qquad \cos\sigma_0 = \frac{\sqrt{f_1} - \sqrt{f_2}}{\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}}, \tag{4}$$

wo die Wurzeln sämtlich positiv zu nehmen sind, zu einem bequemeren Variabilitätsbereich, nämlich zum Halbkreis in der ζ-Ebene (Abb. 3) über. Durch $z(f(\zeta))$ wird der in der oberen ζ-Halbebene gelegene Halbkreis mit dem Mittelpunkt $\zeta = 0$ und dem Radius 1 auf das Gebiet A der z-Ebene abgebildet. Das Bild des Punktes $\zeta = e^{i\sigma_0}$ ist der Punkt $z = 0$, dasjenige des Punktes $\zeta = 0$ der unendlichferne Punkt der z-Ebene. Den Punkten $\zeta = -1$ bzw. $\zeta = +1$ entsprechen die Ablösungsstellen P_1 bzw. P_2. Durchläuft ζ die Strecke $-1, 0$ bzw. $+1, 0$ der reellen Achse, so durchläuft $z(\zeta)$ die freie Linie l_1 bzw. l_2. Die

Profilbogen $\overline{\omega_1}$ und $\overline{\omega_2}$ werden von $z(\zeta)$ beschrieben, wenn ζ auf den Kreisbogen -1, $e^{i\sigma_0}$ und $e^{i\sigma_0}$, $+1$ von -1 nach $+1$ geht.

ω ist eine im Halbkreis reguläre Funktion von ζ, die auf dem ganzen Durchmesser -1, $+1$ endlich und stetig mit $\omega(0) = 0$ ist. Da sie auf der reellen Achse reell ist, kann sie durch Spiegelung in den unteren Halbkreis fortgesetzt werden. ω ist folglich eine im ganzen Kreis $|\zeta| < 1$ reguläre Funktion. Singuläre Stellen auf dem Umfang sind $e^{i\sigma_0}$ und sein Spiegelbild, weil dort $w = 0$ ist. Schließt man diese beiden Punkte aus, so ist $\omega(\zeta)$ auch auf $|\zeta| = 1$ endlich und stetig.

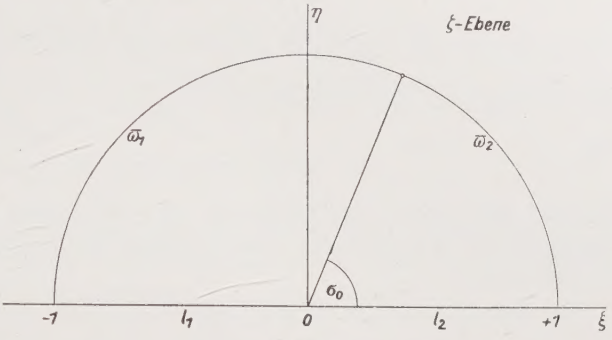

Abb. 3.

Die Abbildungsfunktion, die die Abbildung des Halbkreises der ζ-Ebene auf das Gebiet A der z-Ebene vermittelt, ergibt sich aus

$$dz = e^{i\omega} df.$$

Berechnet man df aus (3), so erhält man

$$(5) \qquad z = \frac{1}{2} a^2 \int_{e^{i\sigma_0}}^{\zeta} e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}\, d\zeta,$$

wo das Integral über einen beliebigen Weg, der den Halbkreis nicht verläßt, zu erstrecken ist. Das Linienelement der z-Ebene ist

$$|dz| = |e^{i\omega}|\,|df| = e^{-\tau}|df|.$$

Daraus folgt für die Krümmung c der Stromlinien, da $d\vartheta$ der Kontingenzwinkel längs einer Stromlinie ist,

$$c = e^{\tau}\frac{d\vartheta}{|df|}.$$

Setzt man in diesen Formeln $\zeta = e^{i\sigma}$, so erhält man die auf das Profil bezüglichen Ausdrücke, nämlich die Parameterdarstellung des Profils

$$(6) \qquad \begin{cases} x = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau}\cos\vartheta\,(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma, \\ y = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau}\sin\vartheta\,(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma, \end{cases}$$

wobei man $\bar{\omega}_1$ oder $\bar{\omega}_2$ erhält, je nachdem man die untere Integrationsgrenze das Intervall σ_0, π oder σ_0, 0 durchlaufen läßt. Aus dem Ausdruck für das Bogenelement $|dz|$ ergibt sich die Bogenlänge $\bar{\omega}$ des Profils zwischen dem Bug O und einem beliebigen Punkt desselben zu

$$\bar{\omega} = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} (\cos\sigma - \cos\sigma_0) \sin\sigma \, d\sigma . \tag{7}$$

Die Krümmung des Profils ist

$$c = \frac{e^{\tau}}{2a^2 |\cos\sigma - \cos\sigma_0| \sin\sigma} \frac{d\vartheta}{|d\sigma|} . \tag{8}$$

Ersetzt man hier $|d\sigma|$ durch $d\sigma$, so erhält man die negative Krümmung, da mit wachsendem σ das Profil im (negativen) Zeigersinn durchlaufen wird.

Die Darstellung der freien Linie l_1 ist (ζ ist hier reell)

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{1}{2} a^2 \int_{-1}^{\zeta} \cos\omega \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta} d\zeta , \\ y = y_1 + \frac{1}{2} a^2 \int_{-1}^{\zeta} \sin\omega \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta} d\zeta , \end{cases} \tag{9}$$

wo x_1, y_1 die Koordinaten der Ablösungsstelle P_1 sind und die obere Integrationsgrenze das Stück -1, 0 der reellen Achse zu durchlaufen hat, wenn der Punkt $z = x + iy$ auf l_1 zum unendlichfernen Punkt wandern soll. Da auf den freien Linien $V = 1$ ist, ist das Bogenelement $|dl_1| = |df|$. Beachtet man dies, so findet man für die Bogenlänge L_1 der freien Linie l_1, genommen zwischen Ablösungsstelle P_1 und einem beliebigen Punkt von l_1,

$$L_1 = \frac{1}{4} a^2 \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right)^2 - a^2 \cos\sigma_0 \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta + 2\right). \tag{10}$$

Das reelle ζ liegt dabei im Intervall -1, 0. Der Ausdruck für die Krümmung endlich lautet

$$c_{l_1} = \frac{2\zeta^3}{a^2 (1-\zeta^2)(\zeta^2 - 2\zeta\cos\sigma_0 + 1)} \frac{d\vartheta}{d\zeta} . \tag{11}$$

Mit dem Bilde der Stromlinien $\psi = \text{const.}$ in der $\zeta = \xi + i\eta$-Ebene

$$[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2\cos\sigma_0 (\xi^2 + \eta^2)] (\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b (\xi^2 + \eta^2)^2 ,$$

wo b ein Parameter ist, ist die Zusammenstellung der geometrischen und kinematischen Elemente, ausgedrückt als Funktion von ζ, abgeschlossen.

Der komplexe Widerstand $R = R_x + i R_y$ ist gegeben durch

$$R_x = \int_\gamma p \cos(n\,x)\, d\gamma\,,$$

$$R_y = \int_\gamma p \cos(n\,y)\, d\gamma\,,$$

wenn γ die Kontur des Körpers C und n die gegen das Innere von C gerichtete Normale von γ bezeichnen. Ist p_0 wieder der Druck im Kielwasser, so gilt für den Druck

$$p = p_0 + \tfrac{1}{2}\,(1 - V^2).$$

Ersetzt man in den Gleichungen für R_x und R_y den Druck durch diesen Ausdruck, so findet man, wenn man den aus $\overline{\omega}_1$ und $\overline{\omega}_2$ bestehenden Bogenkomplex mit $\overline{\omega}$ bezeichnet,

$$R_x = \tfrac{1}{2}\int_{\overline{\omega}} (1 - V^2)\cos(n\,x)\, d\omega\,,$$

$$R_y = \tfrac{1}{2}\int_{\overline{\omega}} (1 - V^2)\cos(n\,y)\, d\overline{\omega}\,.$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich zusammenfassen zu

$$R = \frac{1}{2i}\int (1 - V^2)\, dz\,,$$

wo das Kurvenintegral über den Weg $P_2 O P_1$ zu erstrecken ist.

Geht man von der z-Ebene zum Halbkreis in der ζ-Ebene über, so transformiert sich dieses Integral in

$$R = \frac{1}{2i}\int (1 - e^{2\tau})\, e^{i\omega}\, df = \frac{1}{2i}\int e^{i\omega}\, df - \frac{1}{2i}\int e^{2\tau + i\omega}\, df$$

mit $$df = \frac{1}{2}\, a^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}\, d\zeta\,.$$

Der neue Integrationsweg ist der Halbkreisbogen von $+1$ über $e^{i\sigma_0}$ nach -1. Das zweite Integral auf der rechten Seite dieser Beziehung kann man nun noch umformen. Dazu hat man zu berücksichtigen, daß $\omega(\zeta)$ reell auf der reellen Achse ist, daß also für konjugierte Werte ζ und $\bar{\zeta}$

$$\vartheta(\zeta) = \vartheta(\bar{\zeta}), \quad \tau(\zeta) = -\tau(\bar{\zeta})$$

gilt. Folglich ist, weil auf der Peripherie des Einheitskreises $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ ist,

$$2\tau(\zeta) + i\,\omega(\zeta) = \tau(\zeta) + i\vartheta(\zeta) = -\tau(\bar{\zeta}) + i\vartheta(\bar{\zeta}) = i\,\omega(\bar{\zeta}) = i\,\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Da sich ferner df nicht ändert, wenn man ζ durch $\frac{1}{\zeta}$ ersetzt, ist das Integral

$$\int_{(+1, e^{i\sigma_0}, -1)} e^{2\tau + i\omega} df = \int_{(+1, e^{i\sigma_0}, -1)} e^{i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} df$$

gleich dem Integral

$$\int_{(+1, e^{-i\sigma_0}, -1)} e^{i\omega(\zeta)} df,$$

erstreckt über den Halbkreisbogen von $+1$ über $e^{-i\sigma_0}$ nach -1. Somit ergibt sich für den Widerstand

$$R = \pi \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\omega} df,$$

wo das Integral im Gegenzeigersinn über den ganzen Kreisumfang $|\zeta| = 1$ zu erstrecken ist. Der Widerstand R ist also gleich dem Produkt aus π und dem Residuum der Funktion

$$\frac{1}{2} a^2 e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}$$

für den Pol $\zeta = 0$. Dieses Residuum läßt sich sehr einfach berechnen, es liefert die Widerstandsformel von LEVI-CIVITA

$$(12) \qquad R = R_x + i R_y = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) + i \frac{\pi a^2}{4}\left[2\cos\sigma_0 \cdot \omega'(0) - \frac{1}{2}\omega''(0)\right].$$

Kennt man die Funktion $\omega(\zeta)$ bzw. $w(f)$, wie das angenommen wurde, so sind alle geometrischen und kinematischen Elemente und auch der Widerstand des zu $\omega(\zeta)$ gehörenden Profils eindeutig bestimmt. Der letzte Schritt LEVI-CIVITAS ist nun die Wahl einer bestimmten Form für dieses $\omega(\zeta)$. LEVI-CIVITA zerlegt ω in einen Teil $\omega_0 = \vartheta_0 + i\tau_0$, der die charakteristischen Singularitäten von ω auf dem Umfange des Einheitskreises enthält, und einen Teil $\Omega = \Theta + i\mathsf{T}$, der auch noch auf dem Umfange $|\zeta| = 1$ endlich und stetig bleibt:

$$(13) \qquad \omega = \omega_0 - \Omega = (\vartheta_0 - \Theta) + i(\tau_0 - \mathsf{T}).$$

Diese Singularitäten bestehen darin, daß der Imaginärteil τ von ω im Punkte $\zeta = e^{i\sigma_0}$ bzw. $\zeta = e^{-i\sigma_0}$ unendlich wird und der Realteil ϑ dort einen Sprung macht, während ϑ in allen anderen Punkten von $|\zeta| \leqq 1$ eine stetige Funktion ist, für die die Beziehung $\vartheta(\zeta) = \vartheta(\bar{\zeta})$ gilt. Um etwa den Sprung von ϑ im Punkte $\zeta = e^{i\sigma_0}$ zu untersuchen, bezeichne man (vgl. Abb. 1) mit $2\alpha \leqq \pi$ den Winkel, den die beiden Tangenten in O an $\bar{\omega}_1$ und ω_2 miteinander bilden, und mit $\delta + \alpha$ den Winkel, den die Tangente an $\bar{\omega}_1$ in O mit der positiven x-Achse bildet.

Dann ist $\delta - \alpha$ der Winkel in O zwischen der Tangente an $\overline{\omega}_2$ und der positiven x-Achse. Mit diesen Bezeichnungen hat man, wenn man noch beachtet, daß ϑ der Winkel, den der Vektor der Geschwindigkeit mit der positiven x-Achse bildet, ist,

$$\lim \vartheta = \delta - \alpha,$$

wenn man sich dem Punkte $e^{i\sigma_0}$ längs des Bogens $+1$, $e^{i\sigma_0}$ nähert,

$$\lim \vartheta = \delta + \alpha,$$

wenn man sich dem Punkte $e^{i\sigma_0}$ auf dem Bogen -1, $e^{i\sigma_0}$ nähert.

Levi-Civita wählt die Funktion

$$\omega_0(\zeta) = \delta + \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{-i e^{i\sigma_0} + i\zeta}{1 - e^{i\sigma_0}\zeta} \tag{14}$$

mit

$$\omega_0(0) = \delta - \frac{2\alpha}{\pi}\left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2}\right),$$

die für $\zeta = e^{i\sigma}$, d. h. auf den Profilbogen, geschrieben werden kann

$$\omega_0 = \vartheta_0 + i\tau_0 = \begin{cases} \delta - \alpha + \dfrac{2\alpha}{\pi} i \log \dfrac{\sin\dfrac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\sin\dfrac{\sigma_0 + \sigma}{2}} & (\text{für } 0 \leqq \sigma < \sigma_0), \\ \delta + \alpha + \dfrac{2\alpha}{\pi} i \log \dfrac{\sin\dfrac{\sigma - \sigma_0}{2}}{\sin\dfrac{\sigma_0 + \sigma}{2}} & (\text{für } \sigma_0 < \sigma \leqq \pi). \end{cases}$$

ω_0 ist eine in $|\zeta| < 1$ reguläre Funktion, die auf der reellen Achse reelle Werte annimmt. Ihr Realteil ϑ_0 ist mit Ausnahme der Punkte $e^{i\sigma_0}$ und $e^{-i\sigma_0}$ auch auf dem Umfang des Einheitskreises stetig und nimmt dort auf dem Bogen $e^{-i\sigma_0}$, $+1$, $e^{i\sigma_0}$ den konstanten Wert $\delta - \alpha$, auf dem Bogen $e^{i\sigma_0}$, -1, $e^{-i\sigma_0}$ den konstanten Wert $\delta + \alpha$ an. Die in (12) vorkommenden Werte ihrer Ableitungen sind

$$\omega_0'(0) = -\frac{4\alpha}{\pi} \sin\sigma_0,$$

$$\omega_0''(0) = -\frac{4\alpha}{\pi} \sin 2\sigma_0.$$

Aus dem Ansatz (13) mit der Wahl (14) von ω_0 ergeben sich Bedingungen, denen Ω genügen muß. Zunächst muß Ω als Differenz $\omega_0 - \omega$ auf der reellen Achse reell sein. Setzt man also Ω als in $|\zeta| \leqq 1$ konvergente Potenzreihe

$$\Omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n \tag{15}$$

an, so müssen die Koeffizienten c_n reell sein. Es ist nützlich, die Beziehungen

$$\begin{cases} \Theta(2\pi - \sigma) = \Theta(\sigma), \\ \mathsf{T}(2\pi - \sigma) = -\mathsf{T}(\sigma) \end{cases} \tag{16}$$

für die am Rande des Einheitskreises im Punkte $\zeta = e^{i\sigma}$ angenommenen Werte besonders anzumerken. Aus der zweiten Gleichung (16) folgt $\mathsf{T}(0) = 0$.

Der Realteil Θ von Ω muß in $e^{i\sigma_0}$ und $e^{-i\sigma_0}$ verschwinden. Das gibt

$$\Theta(\sigma_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\sigma_0 = 0. \tag{17}$$

Endlich muß wegen $\omega(0) = 0$ gelten $\Omega(0) = \omega_0(0)$, oder es muß sein

$$c_0 = \delta - \frac{2\alpha}{\pi}\left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2}\right). \tag{18}$$

BRILLOUIN[3]) hat bemerkt, daß die Krümmung der freien Linien im allgemeinen in den Ablösungsstellen über alle Grenzen wächst. Die Krümmung der freien Linie l_1 z. B. kann unter Benutzung von (13) und (14) auf die auch sonst[4]) für die Diskussion des Kielwasserverlaufes nützliche Form

$$c_{l_1} = -\left[\frac{4\alpha}{\pi}\frac{\sin\sigma_0}{\zeta^2 - 2\zeta\cos\sigma_0 + 1} + \frac{d\Omega}{d\zeta}\right]\frac{2\zeta^3}{a^2(1-\zeta^2)(\zeta^2 - 2\zeta\cos\sigma_0 + 1)} \tag{11'}$$

gebracht werden. Der Nenner des zweiten Faktors wird für $\zeta = -1$ Null. Soll $c_{l_1}(P_1)$ endlich bleiben, so muß der Ausdruck in der Klammer für $\zeta = -1$ verschwinden. Das und die entsprechende Bedingung für l_2 gibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n = -\frac{2\alpha}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\sigma_0}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n c_n = -\frac{2\alpha}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}.$$

Hat die Krümmung der freien Linien in den Ablösungsstellen dasselbe Vorzeichen wie die Krümmung der Kontur γ, so kann γ in diesen Punkten nur dann eine endliche und stetige Krümmung haben, wenn die Bedingungen von BRILLOUIN erfüllt sind. BRILLOUIN unterscheidet die Profile, deren Ω diese Bedingungen erfüllt, als „bugförmige" Profile von den anderen, den „pflugförmigen" Profilen.

3) M. Brillouin, *Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la résistance des fluides*. Annales de chimie et de physique (8) 23 (1911), S. 145—230.

4) Vgl. C. Schmieden, *Über die Eindeutigkeit der Lösungen in der Theorie der unstetigen Strömungen*. Ingenieur-Archiv 3 (1932), S. 356—370.

Abschließend ist noch zu betonen, daß die beiden einzigen von LEVI-CIVITA angegebenen Bedingungen (17) und (18) für Ω zwar notwendig, keineswegs aber auch hinreichend sind, um eine hydrodynamisch zulässige Strömung zu gewährleisten. Es gibt sehr einfache Funktionen Ω, die (17) und (18) befriedigen und zu Strömungen führen, bei denen beispielsweise die freie Linie l_1 den Profilbogen $\overline{\omega}_1$ schneidet.[5])

II. Die Integralgleichung von Quarleri.

Nimmt man $\Omega(\zeta)$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, $w(f)$ als gegeben an, so sind alle geometrischen und kinematischen Elemente der Strömung nach den Formeln des Abschnittes I zu berechnen. Die Methode von LEVI-CIVITA ist also ihrem Wesen nach eine indirekte Methode; zu einer gegebenen Funktion $\Omega(\zeta)$ wird die Strömung und das Profil bestimmt. Auf diese Weise erhält man verhältnismäßig einfach Beispiele für Strömungen mit unendlichem Kielwasser. $\Omega = 0$ löst z. B. die Probleme von HELMHOLTZ und BOBYLEFF. Gerade umgekehrt liegt aber das für die Anwendungen wichtigste Problem: Es ist nicht zu einem gegebenen Ω das Profil, sondern zu einem gegebenen Profil das Ω zu suchen. In dieser Bestimmung des zu einem gegebenen Profil gehörenden Ω liegen die schon erwähnten großen Schwierigkeiten.

Die einzige Möglichkeit zur Bestimmung von Ω bietet die Gleichung (8) für die Krümmung des Profils. Setzt man in (8) den Ausdruck (13) für ω ein, so erhält man die folgende Gleichung, der Realteil Θ und Imaginärteil T von Ω auf dem Rande des Halbkreises $\zeta = e^{i\sigma}$, $0 \leqq \sigma \leqq \pi$, genügen müssen:

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\Theta}{d\sigma} = a^2 c(\Theta)\, \chi(\sigma)\, e^{\mathsf{T}}, \\ \chi(\sigma) = 2\,|\cos\sigma - \cos\sigma_0|\, \sin\sigma \left(\dfrac{\sin\dfrac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\sin\left|\dfrac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|} \right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}. \end{cases}$$

Die Profilkrümmung wird hier als bekannte Funktion von Θ betrachtet. $c(\Theta)$ ist jedenfalls gegeben, wenn das Profil eine eindeutige Parameterdarstellung durch den Tangentenwinkel ϑ zuläßt. Denn da bei vorgegebenem Profil c als bekannte Funktion der Profilpunkte anzusehen ist, ist c dann auch als eindeutige Funktion von $\Theta = \vartheta_0 - \vartheta$ darstellbar. $\chi(\sigma)$ bleibt wegen $\frac{2\alpha}{\pi} \leqq 1$ auch für $\sigma = \sigma_0$ endlich.

5) Vgl. M. Brillouin, a. a. O.[3]).

Es muß noch die Rolle der Konstanten a geklärt werden. a ist nach (4) durch die Werte f_1 und f_2 des Potentials in den Ablösungsstellen P_1 und P_2 bestimmt. LEVI-CIVITA bemerkt ausdrücklich, daß man die positive Konstante a ohne weiteres gleich 1 setzen kann. Und in der Tat kann man a jeden beliebigen positiven und von Null verschiedenen Wert b erteilen. Wir nehmen an, daß es in der z-Ebene zu dem betrachteten Profil für irgendein a eine Lösung des hydrodynamischen Problems gibt, d. h., daß es zu dem Profil ein komplexes Potential f gibt, für das

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}) = a$$

ist und das den Randbedingungen genügt. Geht man nun durch

$$f^* = \frac{b^2}{a^2} f$$

einerseits zur f^*-Ebene und andererseits durch

$$z^* = \frac{b^2}{a^2} z \tag{20}$$

zur z^*-Ebene über, so hat man

$$w^* = \frac{df^*}{dz^*} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{df}{dz^*} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{df}{dz}\,\frac{dz}{dz^*} = w\,,$$

$$a^* = \tfrac{1}{2}(\sqrt{f_1^*} + \sqrt{f_2^*}) = \frac{b}{a}\,\tfrac{1}{2}(\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}) = b\,.$$

Das heißt also: Wenn es zu einem Profil in der z-Ebene eine Lösung a, f gibt, so gibt es auch für dasjenige Profil in der z^*-Ebene, das aus dem gegebenen durch die Vergrößerung (20) hervorgeht, eine Lösung a^*, f^*. Dabei hat a^* den willkürlich vorgegebenen Wert $b > 0$, und der Geschwindigkeitszustand in einem Punkte der z^*-Ebene ist gleich dem des ihm vermöge (20) entsprechenden Punktes der z-Ebene. Oder anders ausgedrückt: Durch Maßstabsänderung in der z-Ebene läßt sich jeder beliebige positive Wert von a erreichen. Noch einfacher ergibt sich diese Tatsache, wenn man nicht vom Profil und Potential f ausgeht, sondern a und Ω als gegeben annimmt. Dann unterscheidet sich die mit a und Ω nach (5) berechnete Strömung von der mit b und Ω bestimmten nur durch den Vergrößerungsfaktor $\frac{b^2}{a^2}$; denn die Geschwindigkeiten sind wegen (2) in entsprechenden Punkten gleich, und b und Ω erfüllen auch für dieses vergrößerte Profil die Funktionalgleichung (19), die man schreiben kann

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = b^2 c^* \chi e^{\mathsf{T}}, \qquad c^* = \frac{a^2}{b^2}\,c\,,$$

wo c^* in der Tat die Krümmung des vergrößerten Profils ist, wenn c diejenige des zu a und Ω gehörenden ist.

Hydrodynamisch bedeutungsvoll ist dagegen, das hat besonders WEINSTEIN[6]) betont, der Wert λ des Produktes $a^2 c$; denn die Gleichung (19) wird im allgemeinen für verschiedene $\lambda = a^2 c$ auch verschiedene Lösungen Ω besitzen, sofern sie überhaupt lösbar ist. Diese Einschränkung ist also der Bemerkung von LEVI-CIVITA hinzuzufügen.

Es liegt nahe, die Gleichung (19) dadurch zu vereinfachen, daß man entweder T oder Θ eliminiert. Das kann mit Hilfe der Gleichung[7])

$$(21) \qquad \mathsf{T}(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log\left(\frac{\sin\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}\right)^2 \Theta'(\sigma_1)\, d\sigma_1,$$

in der mit dem Strich die Ableitung nach dem Argument bezeichnet worden ist, geschehen. Mehr Erfolg als die Elimination von T in (19) durch Einsetzen von (21)[8]) verspricht diejenige von Θ nach QUARLERI. Ersetzt man Θ' in (21) durch den Ausdruck (19), so erhält man die Integralgleichung

$$(22) \quad \mathsf{T}(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 c\,(\Theta(\sigma_1))\, e^{\mathsf{T}(\sigma_1)}\, \chi(\sigma_1;\sigma_0) \log\left(\frac{\sin\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_1-\sigma}{2}}\right)^2 d\sigma_1 \quad (0 \leqq \sigma \leqq \pi),$$

wo die Abhängigkeit der Funktion χ von dem Parameter σ_0 durch die Schreibweise $\chi(\sigma;\sigma_0)$ besonders hervorgehoben wurde. Diese Gleichung ist zuerst für den Fall des Kreises von QUARLERI[9]) aufgestellt worden. In $c(\Theta(\sigma))$ ist noch $\Theta(\sigma)$ durch $\mathsf{T}(\sigma)$ auszudrücken. Nun ist die im Einheitskreis reguläre Funktion $\Omega(\zeta)$, deren Imaginärteil T auf dem Rande $\zeta = e^{i\sigma_1}$ die Werte $\mathsf{T}(\sigma_1)$ annimmt, gegeben durch[10])

$$(23) \qquad \Omega(\zeta) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\mathsf{T}(\sigma_1) - \mathsf{T}(\sigma)]\, \frac{1+\zeta e^{-i\sigma_1}}{1-\zeta e^{-i\sigma_1}}\, d\sigma_1 + i\,\mathsf{T}(\sigma) + \text{const.},$$

6) A. Weinstein, Zentralblatt f. Mechanik 2 (1935), S. 83.

7) Vgl. T. Levi-Civita, *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (5) 20 (1911), S. 285—296. — U. Cisotti, *Idromeccanica piana.* I (Milano 1921), S. 20, II (Milano 1922), S. 199.

8) Vgl. U. Cisotti, a. a. O. [7]).

9) A. Quarleri, *Sulla teoria della „scia" nei liquidi perfetti. Risoluzione del problema nel caso del cilindro rotondo.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 14 (1931), S. 332—337. — Ders., *Sulla teoria della „scia" nei liquidi perfetti. Risoluzione del problema nel caso del cilindro rotondo.* Rendiconti Circolo Matematico Palermo 57 (1933), S. 196—209.

10) Vgl. z. B. H. Villat, a. a. O. [2b]), S. 7—10.

wo die Konstante reell ist. Diese Darstellung gilt auch noch für $\zeta = e^{i\sigma}$ und liefert die Randwerte $\Theta(\sigma)$ des Realteils von Ω:

$$\Theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathsf{T}(\sigma) - \mathsf{T}(\sigma_1)}{\operatorname{tg}\frac{\sigma-\sigma_1}{2}}\, d\sigma_1 + \text{const.} \tag{24}$$

Wegen $\mathsf{T}(2\pi - \sigma_1) = -\mathsf{T}(\sigma_1)$ wird die in (23) und (24) auftretende reelle Konstante nach (23) gleich $\Omega(0) = \delta - \frac{2\alpha}{\pi}\left(\sigma_0 - \frac{\pi}{2}\right)$. Eine andere Möglichkeit, $\Theta(\sigma)$ durch $\mathsf{T}(\sigma)$ auszudrücken, bietet die zu (21) analoge Formel[11])

$$\Theta(\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \log \frac{1}{16\sin^2\frac{\sigma_1-\sigma}{2}\sin^2\frac{\sigma_1+\sigma}{2}}\, \mathsf{T}'(\sigma_1)\, d\sigma_1 + \text{const.} \tag{25}$$

Hier ist die Konstante durch $\Theta(\sigma_0) = 0$ festgelegt. Endlich kann man in (22) an Stelle von a^2 durch

$$a^2 = \frac{\bar{\omega}_2}{2\int_0^{\sigma_0} e^{-\tau_0}\sin\sigma_2\,(\cos\sigma_2 - \cos\sigma_0)\, e^{\mathsf{T}}\, d\sigma_2}$$

noch die zwischen Bug und Ablösungsstelle P_2 gemessene Bogenlänge $\bar{\omega}_2$ einführen.

Mit (24) bzw. (25) lassen sich auch die Bedingungen (17) und (18) auf die Randwerte $\mathsf{T}(\sigma)$ übertragen. Für (17) ist das ohne weiteres klar. Für (18) ergibt es sich aus der Darstellung von $\Omega(0)$ durch die Randwerte. Es ist

$$\Omega(0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta,$$

wo das Integral über den Umfang des Einheitskreises zu erstrecken ist. Da Ω auf der reellen Achse reell ist, hat man (vgl. (16))

$$\Omega(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Theta(\sigma)\, d\sigma.$$

Ähnlich läßt sich auch der Widerstand direkt aus den Randwerten $\mathsf{T}(\sigma)$ berechnen; denn es ist

$$\begin{aligned}\Omega'(0) &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta^2}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Theta\cos\sigma + \mathsf{T}\sin\sigma]\, d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\Theta\cos\sigma + \mathsf{T}\sin\sigma]\, d\sigma\end{aligned}$$

11) T. Levi-Civita, a. a. O. 7).

oder mit (24)

$$\Omega'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{T}(\sigma)\sin\sigma\, d\sigma + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\mathsf{T}(\sigma)-\mathsf{T}(\sigma_1)]\,\frac{\cos\sigma}{\operatorname{tg}\frac{\sigma-\sigma_1}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma .$$

Ebenso erhält man aus

$$\Omega''(0) = \frac{1}{\pi i}\int \frac{\Omega(\zeta)}{\zeta^3}\, d\zeta$$

den entsprechenden Ausdruck

$$\Omega''(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathsf{T}(\sigma)\sin 2\sigma\, d\sigma + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\mathsf{T}(\sigma)-\mathsf{T}(\sigma_1)]\,\frac{\cos 2\sigma}{\operatorname{tg}\frac{\sigma-\sigma_1}{2}}\, d\sigma_1\, d\sigma .$$

Mit diesen Ausdrücken für die Ableitungen von Ω an der Stelle $\zeta = 0$ ist der Widerstand unter Beachtung von (13) nach (12) zu berechnen. Levi-Civita hat darauf hingewiesen, daß der Widerstand allein vom Bewegungszustand der Flüssigkeit am Profilbogen $P_1 O P_2$ abhängt. Das wird hier besonders deutlich, da $\mathsf{T}(\sigma)$ die Geschwindigkeitsverteilung am Profil bestimmt.

Es ergibt sich also folgendes Verfahren zur Berechnung des Widerstandes eines gegebenen Profils: Man stelle (22) mit der gegebenen Krümmungsfunktion auf und berechne, falls (22) für ein Wertepaar der Parameter a^2 und σ_0 eine oder mehrere hydrodynamisch zulässige Lösungen $\mathsf{T}(\sigma)$ besitzt, den Widerstand in der angegebenen Weise aus diesen Lösungen $\mathsf{T}(\sigma)$. Die exakte Lösung von (22) ist bisher auch im einfachsten Falle $a^2 c \doteq$ const. nicht gelungen. Diese Gleichung hat aber eine zur Iteration geeignete Form. Man kann für jedes Wertepaar a^2 und σ_0 mit $0 < \sigma_0 < \pi$, wie auch die Funktion c, d. h. also das Profil, beschaffen sein mag, ausgehend von einer beliebigen Funktion T_0, das Integral auf der rechten Seite von (22) mit $\mathsf{T}(\sigma) = \mathsf{T}_0(\sigma)$ berechnen und so eine erste Iterierte T_1 selbst oder wenigstens ihre Werte an beliebigen Stellen des Intervalls $0 \leqq \sigma \leqq \pi$ gewinnen. Denn ist c wieder als Funktion von Θ gegeben, so kann man für jeden Wert von σ das zu $\mathsf{T}_0(\sigma)$ gehörige $\Theta_0(\sigma)$ nach (24) oder (25), da mit $\mathsf{T}_0(\sigma)$ auch die Ableitung $\mathsf{T}_0'(\sigma)$ nach σ als gegeben anzusehen ist, berechnen. Praktisch wird man T_0 so wählen, daß der Übergang zu Θ_0 möglichst einfach wird. Setzt man z. B. mit reellen c_n

$$\mathsf{T}_0(\sigma) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin n\sigma ,$$

so entspricht das einer Annäherung von Ω durch die ersten $N+1$ Glieder der Potenzreihe (15) und führt zu den Randwerten

$$\Theta_0(\sigma) = \sum_{n=0}^{N} c_n \cos n\sigma.$$

Umgekehrt wird man die punktweise erhaltene erste Iterierte T_1 durch ein Sinuspolynom interpolieren, um mühelos zu Ω übergehen oder die Iteration fortsetzen zu können. Die Frage nach der Konvergenz dieses Verfahrens kann nur von Fall zu Fall beantwortet werden. Daß aber die Möglichkeit einer näherungsweisen Lösung von (22) durch Iteration besteht, wird im folgenden Abschnitt für den einfachsten Fall, nämlich für zur Strömung symmetrisch orientierte und konvexe Kreisbogen, nachgewiesen werden. Es wird sich zeigen, daß sich auf diesem Wege praktisch durchaus brauchbare Ergebnisse erzielen lassen.

Alles bisher Gesagte kann ohne weiteres auf eine Strömung mit von 1 verschiedener Geschwindigkeit im Unendlichfernen übertragen werden. Man hat in diesem Falle für die komplexe Geschwindigkeit w^* und das komplexe Potential f^* nur

$$w^* = V_\infty w, \quad f^* = V_\infty f$$

zu setzen. Dann haben w und f wieder die alte Bedeutung. Zu einem gegebenen $\omega(\zeta)$ erhält man die Strömung mit der Geschwindigkeit V_∞ im Unendlichfernen durch den Ansatz

$$\omega^* = \omega + i \log V_\infty, \quad f^* = V_\infty f.$$

Dann ist

$$w^* = e^{-i\omega^*} = V_\infty w, \quad a^{*2} = a^2 V_\infty,$$

und (5) lehrt, daß das Strömungsbild (Profil und Stromlinien) für beide Geschwindigkeiten dasselbe ist. Der zu einem Wert V_∞ gehörende Geschwindigkeitszustand geht aus dem zu $V_\infty = 1$ gehörigen dadurch hervor, daß die Geschwindigkeit des letzteren an jeder Stelle mit der Konstanten V_∞ multipliziert wird. Der Widerstand ist, wenn auch noch die Dichte ϱ der Flüssigkeit als von 1 verschieden angenommen wird,

$$R = \varrho V_\infty^2 \left\{ \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) + i \frac{\pi a^2}{2} \left[2 \cos\sigma_0 \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0) \right] \right\}.$$

Die quadratische Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit stimmt mit der Erfahrung überein und schließt die Reibung als ausschlaggebende Ursache des Widerstandes aus. LEVI-CIVITA hat gezeigt[12]), daß der nach seiner Methode berechnete Widerstand für

12) A. a. O. [1]), S. 32.

symmetrische und symmetrisch zur x-Achse orientierte Profile von Null verschieden ist, wenn die Neigung ϑ der Tangente an $\overline{\omega}_1$ längs ω_1 ständig abnehmend von α bis zu einem gewissen Wert $\vartheta_1 > 0$ variiert. In diesem besonderen Falle führt also die Methode von LEVI-CIVITA immer zum Ziel, wenn es gelingt, $\mathsf{T}(\sigma)$ zu bestimmen.

III. Bestimmung der Strömung um Kreisprofile.

Für zur Strömung symmetrisch orientierte und konvexe Kreisbogen werden die Formeln der vorangehenden beiden Abschnitte besonders einfach. Aus der Voraussetzung, daß die x-Achse Symmetrieachse des Profils ist, folgt zunächst $\delta = 0$. Weiter muß wegen der Symmetrie die komplexe Geschwindigkeit $w(z)$ in konjugierten Punkten z und $\bar{z}$ konjugierte Werte annehmen, d. h. w muß auf der reellen Achse der z-Ebene reell sein. Dann muß auch f auf dieser Achse reell sein. f nimmt daher in symmetrisch zur x-Achse gelegenen Punkten, z. B. in den Ablösungsstellen P_1 und P_2, konjugierte Werte an. Aus $f_1 = \overline{f}_2$ folgt aber, weil f_1 und f_2 reell sind, $f_1 = f_2$ und

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Mit diesen Werten von δ und σ_0 ergibt sich

$$\omega_0(\zeta) = \frac{2\alpha i}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}. \tag{14'}$$

Die Betrachtung der Abbildung der ζ-Ebene auf die z-Ebene lehrt, daß $w(\zeta)$ konjugierte Werte in den Punkten ζ und $-\bar{\zeta}$ annimmt. Für rein imaginäres ζ ist also $w(\zeta)$ reell. Dieses Verhalten von $w(\zeta)$ führt über (2) und (13) zu dem Ansatz

$$\Omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{2n+1}, \tag{15'}$$

der die beiden Bedingungen (17) und (18) identisch erfüllt. Zu (16) kommt hier noch

$$\begin{cases} \Theta(\pi - \sigma) = -\Theta(\sigma), \\ \mathsf{T}(\pi - \sigma) = \mathsf{T}(\sigma) \end{cases} \tag{16'}$$

hinzu. Die übrigen Vereinfachungen der Formeln des ersten Abschnitts ergeben sich mühelos durch Einsetzen von $\delta = 0$ und $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$. Besonders

erwähnt sei, daß sich der Widerstand auf den direkten Widerstand

$$R_x = \frac{\pi a^2}{4}\left(\frac{4\alpha}{\pi} + \Omega'(0)\right)^2 \tag{12'}$$

reduziert.

Für den Kreis ist der Bug O ein gewöhnlicher Punkt, man hat also $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Mit allen diesen Vereinfachungen nimmt die Gleichung (19) die Form

$$\frac{d\Theta}{d\sigma} = 2a^2 c \sin\sigma\,[1 + \sin\sigma]\, e^{\mathsf{T}(\sigma)} \qquad \left(0 \leqq \sigma \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{19'}$$

an, wo die Krümmung c für zur Strömung konvexe Kreisbogen eine positive Konstante ist. (19') in die aus (21) mit (16') folgende Gleichung

$$\mathsf{T}(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta(\sigma_1)}{d\sigma_1} \log\left(\frac{\sin\sigma_1 + \sin\sigma}{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}\right)^2 d\sigma_1 \qquad \left(0 \leqq \sigma \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{21'}$$

eingesetzt, liefert, wenn man noch die positive Konstante $a^2 c = \lambda$ setzt, die Integralgleichung von QUARLERI

$$\mathsf{T}(\sigma) = -\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\mathsf{T}(\sigma_1)} \sin\sigma_1\,[1 + \sin\sigma_1] \log\left(\frac{\sin\sigma_1 + \sin\sigma}{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}\right)^2 d\sigma_1 \quad \left(0 \leqq \sigma \leqq \frac{\pi}{2}\right). \tag{26}$$

QUARLERI hat darauf hingewiesen, daß Existenzsätze von HAMMERSTEIN über nichtlineare Integralgleichungen auf (26) anwendbar sind. Der Kern

$$\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\sin\sigma_1 + \sin\sigma}{\sin\sigma_1 - \sin\sigma}\right)^2 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\sigma \sin(2n-1)\sigma_1}{2n-1}$$

ist brauchbar unstetig, symmetrisch, im Integrationsgebiet nirgends negativ und positiv definit. Die Funktion

$$f(\sigma_1, u) = 2\lambda e^u \sin\sigma_1 (1 + \sin\sigma_1)$$

ist stetig für alle σ_1 des Integrationsgebietes und beliebige u. Sie ist ferner für alle σ_1 des Integrationsgebietes monoton nicht abnehmend in u. Daher besitzt (26) nach HAMMERSTEIN[13]) eine und nur eine

13) A. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*. Acta math. 54 (1930), S. 117—176 Satz 3 III und Satz 5.

Lösung für jeden Wert von λ. Die von QUARLERI angegebene Lösung ist aber, wie die Kritiken von GLEIJESES und WEINSTEIN [14]) gezeigt haben, falsch.

Für die Auswertung der Gleichung (26) ersetzen wir das Integral durch eine Summe und die Integralgleichung durch ein Gleichungssystem. Dabei muß aber noch die Schwierigkeit, die darin liegt, daß der Kern

$$K(\sigma_1;\sigma) = \frac{1}{\pi}\sin\sigma_1\,[1+\sin\sigma_1]\log\left(\frac{\sin\sigma_1+\sin\sigma}{\sin\sigma_1-\sin\sigma}\right)^2$$

an der Stelle $\sigma_1 = \sigma$ unendlich wird, umgangen werden. Das gelingt, wenn man das Integral auf der rechten Seite von (26) für $\sigma \neq \frac{\pi}{2}$ folgendermaßen berechnet, wobei der Faktor $\frac{1}{\pi}$ zum Integranden genommen werde und $\sigma = \mu h$ sei. Das Integrationsintervall $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ wird in die Teilintervalle

$$\left(0, \frac{h}{2}\right), \left(\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right), \left(\frac{3h}{2}, \frac{5h}{2}\right), \cdots, \left(\frac{\pi}{2}-\frac{3h}{2}, \frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

geteilt. Dann liegt die Unstetigkeitsstelle $\sigma_1 = \mu h$ (μ wird als ganze Zahl vorausgesetzt) in der Mitte des Intervalls $\left(\mu h - \frac{h}{2}, \mu h + \frac{h}{2}\right)$. Der Beitrag dieses Intervalls zum Gesamtwert des Integrals wird durch

$$A_{\mu\mu} = \frac{1}{\pi}\sin\mu h\,[1+\sin\mu h]\int_{\mu h-\frac{h}{2}}^{\mu h+\frac{h}{2}} \log\left(\frac{\sin\sigma_1+\sin\mu h}{\sin\sigma_1-\sin\mu h}\right)^2 d\sigma_1$$

berücksichtigt. In den übrigen Teilintervallen der Länge h wird der Integrand durch die Tangente in dem Punkt, dessen Abszisse in der Mitte des Intervalls liegt, ersetzt. Der Beitrag eines solches Teilintervalls ist dann durch das Produkt aus h und der Mittelordinate gegeben. Zu der Summe dieser Beiträge ist noch der Flächeninhalt des Dreiecks mit der Grundlinie $0, \frac{h}{2}$ und derjenige des am Intervallende gelegenen Trapezes hinzuzufügen. Der Inhalt des Dreiecks ist

$$\frac{h}{8}K\left(\frac{h}{2}, \mu h\right)(1-e^{\tau(h)}),$$

14) M. Gleijeses, *Sulla teoria della „scia" nei liquidi perfetti. — Caso del cilindro rotondo.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 16 (1932), S. 435—438. — A. Weinstein, Zentralblatt f. Mechanik 1 (1934), S. 27. — Ders., a. a. O. [6]).

wenn man linear interpoliert, also $e^{\mathsf{T}\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + e^{\mathsf{T}(h)}\right)$ setzt. Der Inhalt des Trapezes ist

$$\frac{h}{4}\left[K\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}, \mu h\right)\frac{1}{2}\left(e^{\mathsf{T}\left(\frac{\pi}{2}-h\right)} + e^{\mathsf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) + K\left(\frac{\pi}{2}, \mu h\right)e^{\mathsf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right],$$

wo der Wert $e^{\mathsf{T}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}\right)}$ wieder linear interpoliert wurde. Die Abänderung, die für den Fall $\sigma = \frac{\pi}{2}$ nötig ist, ergibt sich daraus, daß man dann den Beitrag des letzten Intervalls durch

$$A_{nn} = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{h}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin\sigma_1 + 1}{\sin\sigma_1 - 1}\right)^2 d\sigma_1$$

zu berechnen hat. So gelangt man zu dem Gleichungssystem

$$\mathsf{T}(\mu h) = -\lambda\left(a_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} e^{\mathsf{T}(\nu h)}\right) \qquad \left(\begin{matrix}\mu = 1, 2, \ldots, n;\\ nh = \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right), \tag{27}$$

wo $\mu = 0$ wegen $\mathsf{T}(0) = 0$ weggelassen wurde und die Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ für $\mu \neq \nu$ die Werte haben

$$a_{\mu 0} = \frac{h}{8}K\left(\frac{h}{2}, \mu h\right),$$

$$a_{\mu 1} = \frac{h}{8}K\left(\frac{h}{2}, \mu h\right) + hK(h, \mu h),$$

$$a_{\mu\nu} = hK(\nu h, \mu h) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n-2)$$

und für $\mu \neq n$

$$a_{\mu, n-1} = hK\left(\frac{\pi}{2} - h, \mu h\right) + \frac{h}{8}K\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}, \mu h\right),$$

$$a_{\mu n} = \frac{h}{8}K\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}, \mu h\right) + \frac{h}{4}K\left(\frac{\pi}{2}, \mu h\right).$$

Weiter ist

$$a_{11} = \frac{h}{8}K\left(\frac{h}{2}, h\right) + A_{11},$$

$$a_{\mu\mu} = A_{\mu\mu} \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, n-2),$$

$$a_{n-1, n-1} = \frac{h}{8}K\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h}{2}, \frac{\pi}{2} - h\right) + A_{n-1, n-1},$$

$$a_{n, n-1} = hK\left(\frac{\pi}{2} - h, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_{nn} = A_{nn}.$$

Im folgenden wurde $n = 9$, also $h = \text{arc } 10^0$ gewählt. Die erforderlichen Werte von $K(\sigma_1, \sigma)$ sind in Tabelle 1 enthalten.

Tabelle 1.

σ_1	$\sigma = 10^0$	$\sigma = 20^0$	$\sigma = 30^0$	$\sigma = 40^0$	$\sigma = 50^0$	$\sigma = 60^0$	$\sigma = 70^0$	$\sigma = 80^0$	$\sigma = 90^0$
5^0	0,066 58	0,031 44	0,021 25	0,016 46	0,013 79	0,012 18	0,011 22	0,010 70	0,010 54
10^0	∞	0,145 22	0,094 03	0,071 88	0,059 86	0,052 75	0,048 51	0,046 24	0,045 52
20^0	0,327 06	∞	0,488 96	0,346 59	0,280 69	0,244 07	0,222 93	0,211 77	0,208 27
30^0	0,346 03	0,798 96	∞	0,993 06	0,744 84	0,628 80	0,566 33	0,534 42	0,524 55
40^0	0,372 46	0,797 36	1,398 19	∞	1,637 76	1,284 56	1,124 90	1,048 70	1,025 73
50^0	0,397 37	0,827 31	1,343 56	2,098 25	∞	2,405 18	1,967 75	1,791 32	1,740 93
60^0	0,418 24	0,859 31	1,354 88	1,965 86	2,873 03	∞	3,291 27	2,825 17	2,709 76
70^0	0,433 84	0,885 26	1,376 33	1,941 70	2,651 14	3,712 22	∞	4,355 13	4,027 47
80^0	0,443 47	0,901 84	1,392 81	1,941 21	2,588 14	3,417 17	4,670 38	∞	6,063 19
85^0	0,445 90	0,906 08	1,397 28	1,942 28	2,577 04	3,368 38	4,474 03	6,531 06	7,928 33
90^0	0,446 72	0,907 51	1,398 80	1,942 73	2,573 68	3,353 61	4,419 20	6,203 85	∞

Die in dem Unendlichwerden des Integranden liegende Schwierigkeit wird also in einfacher Weise durch die Verwendung der Integrale $A_{\mu\mu}$, genauer durch die Benutzung des konvergenten uneigentlichen Integrals

$$\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \log \left| \frac{\sin \sigma_1 + \sin \sigma}{\sin \sigma_1 - \sin \sigma} \right| d\sigma_1$$

behoben. Im Gegensatz zu Abschnitt I und II ist hier und im folgenden als log der Briggische Logarithmus zur Basis 10 genommen worden. Wegen

$$\frac{\sin \sigma_1 + \sin \sigma}{\sin \sigma_1 - \sin \sigma} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma)}$$

ist dieses Integral gleich

$$\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} |\sigma_1 + \sigma| \, d\sigma_1 - \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma| \, d\sigma_1 .$$

Durch die Substitution $\frac{1}{2}|\sigma_1 + \sigma| = \frac{\pi}{4} u$ bzw. $\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma| = \frac{\pi}{4} u$ erhält man mit

$$F(u) = \int \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} u \right) du ,$$

je nachdem $\sigma_1 > \sigma$ oder $\sigma_1 < \sigma$ ist, das Integrationsintervall Σ_1, Σ_2

also rechts oder links von der Unstetigkeitsstelle liegt,

$$\frac{2}{\pi}\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}\log\left|\frac{\sin\sigma_1+\sin\sigma}{\sin\sigma_1-\sin\sigma}\right|d\sigma_1=\left[F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_2+\sigma\,|\right)-F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_1+\sigma\,|\right)\right]$$
$$-\begin{cases}F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_2-\sigma\,|\right)-F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_1-\sigma\,|\right)\text{ für }\sigma_1\geqq\sigma,\\ F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_1-\sigma\,|\right)-F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_2-\sigma\,|\right)\text{ für }\sigma_1\leqq\sigma.\end{cases}$$

Liegt die Unstetigkeitsstelle $\sigma_1=\sigma=\Sigma_2$ im Innern des Intervalls Σ_1, Σ_3, so erhält man durch entsprechende Zerlegung des Integrals

$$\frac{2}{\pi}\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_3}\log\left|\frac{\sin\sigma_1+\sin\Sigma_2}{\sin\sigma_1-\sin\Sigma_2}\right|d\sigma_1$$
$$=\left[F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_3+\Sigma_2\,|\right)-F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_1+\Sigma_2\,|\right)\right]-\left[F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_1-\Sigma_2\,|\right)-F(0)\right]$$
$$-\left[F\left(\frac{2}{\pi}\,|\,\Sigma_3-\Sigma_2\,|\right)-F(0)\right].$$

In dem vorliegenden Falle, wo die Unstetigkeitsstelle Σ_2 in der Mitte des Intervalls Σ_1, Σ_3 liegt, also $|\,\Sigma_1-\Sigma_2\,|=|\,\Sigma_3-\Sigma_2\,|$ ist, sind die letzten beiden Glieder gleich. Somit ist für $\mu=1,2,\ldots,n-1$

$$A_{\mu\mu}=\frac{1}{M}\sin\mu h\,[1+\sin\mu h]\left\{F\left(\frac{2}{\pi}\,\middle|\,2\mu h+\frac{h}{2}\,\middle|\right)-F\left(\frac{2}{\pi}\,\middle|\,2\mu h-\frac{h}{2}\,\middle|\right)\right.$$
$$\left.-2\left[F\left(\frac{h}{\pi}\right)-F(0)\right]\right\}\qquad\left(\frac{1}{M}=2{,}30259\right)$$

und

$$A_{nn}=\frac{2}{M}\left\{F(2)-F\left(\frac{2}{\pi}\left[\pi-\frac{h}{2}\right]\right)-\left[F\left(\frac{h}{\pi}\right)-F(0)\right]\right\}.$$

Die Funktion $F(u)$ läßt sich nun folgendermaßen berechnen:

Es ist[15])

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}u\right)=\log u+\log(4+u)+\log(4-u)-\log(2+u)$$
$$-\log(2-u)+d_0+d_2u^2+d_4u^4+d_6u^6+\cdots,$$

und zwar gilt diese Darstellung für $0<u<2$. Gliedweise Integration liefert, wenn gleich die numerischen Werte der Koeffizienten eingesetzt werden,

15) Vgl. J. Peters, *Zehnstellige Logarithmentafel I.* Berlin 1922, Anhang, Tafel 11.

$$F(u) = \int \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} u\right) du$$
$$= F(0) + u \log u + (4+u)\log(4+u) - (4-u)\log(4-u)$$
$$+ (2-u)\log(2-u) - (2+u)\log(2+u)$$
$$- 1{,}14126459\,19\, u$$
$$+ 0{,}00262266\,94\, u^3$$
$$+ 0{,}00002587\,53\, u^5$$
$$+ 0{,}00000038\,00\, u^7$$
$$+ 0{,}00000000\,66\, u^9 + \cdots.$$

Nützlich für die Rechnung ist noch die aus der Integraldarstellung folgende Beziehung

$$F(2-x) - F(0) = F(x) - F(0).$$

Die Werte der $A_{\mu\mu}$ sind in Tabelle 2 wiedergegeben.

Tabelle 2.

$A_{11} = 0{,}054\,03$	$A_{44} = 0{,}464\,16$	$A_{77} = 1{,}041\,94$
$A_{22} = 0{,}159\,05$	$A_{55} = 0{,}647\,48$	$A_{88} = 1{,}276\,50$
$A_{33} = 0{,}298\,47$	$A_{66} = 0{,}840\,67$	$A_{99} = 0{,}918\,16$

Das Gleichungssystem (27) gehört zu der wichtigen Gruppe der Systeme mit einem Parameter λ

$$(28) \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \lambda \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \lambda \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Ein derartiges System kann für hinreichend kleine Werte von λ immer durch Iteration gelöst werden, wenn die partiellen ersten Ableitungen der Funktionen φ in der Umgebung der Lösung beschränkt sind. Liegen die Näherungen in einer solchen Umgebung der Lösung, so konvergiert das Verfahren, wenn gleichzeitig dort

$$|\lambda| \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_1}\right| < 1, \quad |\lambda| \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_2}\right| < 1, \ldots, |\lambda| \sum_{\nu=1}^{n} \left|\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_n}\right| < 1$$

ist. Diese Bedingung ist aber für hinreichend kleine Werte von λ erfüllt. Auf (27) übertragen gibt das

$$\lambda e^{\mathrm{T}(\nu h)} \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (26) ersieht man, daß für $0 \leqq \sigma \leqq \frac{\pi}{2}$ stets $\mathsf{T}(\sigma) \leqq 0$ und folglich $e^{\mathsf{T}} \leq 1$ ist. Es genügt also, daß die Faktoren der Exponentialfunktion in diesen Ungleichungen kleiner als 1 sind. So ergibt sich aus den numerischen Werten der Koeffizienten, daß (27) bei festgehaltenem λ jedenfalls dann durch Iteration gelöst werden kann, wenn $\lambda < 0{,}18$ ist. Das ist naturgemäß eine sehr ungünstige Schranke. Tatsächlich ist das Verfahren mit einer gleich zu erörternden Abänderung für wesentlich größere λ-Werte brauchbar. Für sehr kleine λ kann man übrigens ohne weiteres Näherungslösungen der Integralgleichung (26) angeben. Aus (26) folgt nämlich die Abschätzung

$$\lambda e^{-\lambda W\left(\frac{\pi}{2}\right)} W(\sigma) \leqq |\mathsf{T}(\sigma)| \leqq \lambda W(\sigma), \tag{29}$$

wo

$$W(\sigma) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} K(\sigma_1, \sigma)\, d\sigma_1$$

eine von WEINSTEIN[16]) berechnete Funktion ist, die im Intervall $0 \leqq \sigma \leqq \frac{\pi}{2}$ monoton wächst und bei $\sigma = \frac{\pi}{2}$ das Maximum $\frac{11{,}9}{\pi}$ annimmt. Diese Abschätzung zeigt, daß das Maximum des absoluten Betrages von $\mathsf{T}(\sigma)$ mit λ gegen Null geht und daß man für hinreichend kleine λ als Näherungslösung

$$\mathsf{T}(\sigma) = -\lambda W(\sigma)$$

setzen kann. Denn man hat

$$\lambda W(\sigma)\left(1 - \lambda W\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) < \lambda W(\sigma) e^{-\lambda W\left(\frac{\pi}{2}\right)} \leqq |\mathsf{T}(\sigma)| \leqq \lambda W(\sigma),$$

worin man das Glied mit λ^2 für genügend kleine λ dem Gliede $\lambda W(\sigma)$ gegenüber vernachlässigen kann.

Bei dem System (28) kann man die Konvergenz der Iteration dadurch beschleunigen, daß man den Parameter λ ebenfalls iteriert. Das soll heißen, daß man zu jeder Näherung $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ den Parameter $\lambda = \lambda_1$ so bestimmt, daß (28) für diesen Wert λ_1 von λ durch die Näherung möglichst gut erfüllt wird. Als Maß für die Güte mit der $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ die Gleichungen (28) erfüllen, könnte man dabei die Summe der Fehlerquadrate wählen. Dann wäre λ_1 aus der Be-

16) A. Weinstein, *Sur les sillages provoqués par des arcs circulaires.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend. (6) 17 (1933), S. 83—87.

dingung, daß $\sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu{}^0 - \lambda_1 \varphi_\nu (x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0))^2$ ein Minimum sein soll, zu bestimmen. Im folgenden wurde einfach

$$\lambda_1 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{x_\nu{}^0}{\varphi_\nu (x_1{}^0, x_2{}^0, \ldots, x_n{}^0)}$$

gesetzt, d. h.

$$\lambda_1 = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\mathsf{T}_0 (\mu h)}{\mathsf{T}_1{}^* (\mu h)}, \tag{30}$$

wo

$$\mathsf{T}_1{}^* (\mu h) = - \{ a_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} e^{\mathsf{T}(\nu h)} \}$$

und T_0 die benutzte Näherung ist. Das Iterationsverfahren ist also folgendermaßen auszuführen:

Man berechne mit der Ausgangsfunktion T_0 den Klammerausdruck $\mathsf{T}_1{}^*$ auf der rechten Seite von (27), bilde nach (30) den Mittelwert λ_1 und berechne die erste Iterierte T_1 aus

$$\mathsf{T}_1 (\mu h) = \lambda_1 \mathsf{T}_1{}^* (\mu h).$$

War T_0 schon eine verhältnismäßig gute Näherungslösung für den Wert $\lambda = \lambda_0$, so liegt auch der Mittelwert λ_1 nahe bei λ_0 und man hat sich nach der Ausführung dieses ersten Iterationsschrittes nicht weit von dem gegebenen λ_0 entfernt. Im anderen Falle muß man sich erst durch gewöhnliche Iteration eine geeignete Näherungslösung für $\lambda = \lambda_0$ verschaffen, wenn man Wert darauf legt, in der Nähe eines vorgegebenen λ_0 zu bleiben.

Neben der Verbesserung der Konvergenz bietet das eben geschilderte Verfahren noch den weiteren Vorteil, daß T_1 sich von T_0 möglichst wenig unterscheidet, daß sich also oft die Konvergenz- und Integrationsverhältnisse für T_1 von den für T_0 vorliegenden nur unwesentlich unterscheiden werden.

Um eine durch Iteration punktweise erhaltene Näherungslösung T bequem auswerten zu können, hat man durch die Werte $\mathsf{T}(\mu h)$ ein Sinuspolynom zu legen, d. h. $\mathsf{T}(\sigma)$ in der Form

$$\mathsf{T}(\sigma) = B_1 \sin \sigma + B_2 \sin 2\sigma + \cdots + B_{n-1} \sin (n-1)\sigma$$

anzusetzen und zu

$$\Omega(\zeta) = B_1 \zeta + B_2 \zeta^2 + \cdots + B_{n-1} \zeta^{n-1}$$

überzugehen.

Setzt man[17])

$$\mathsf{T}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \mathsf{T}_1,\ \mathsf{T}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \mathsf{T}_2,\ \ldots,\ \mathsf{T}\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \mathsf{T}_{n-1},$$

so hat man

$$B_m = \frac{2}{n}\left(\mathsf{T}_1 \sin\frac{m\pi}{n} + \mathsf{T}_2 \sin\frac{2m\pi}{n} + \cdots + \mathsf{T}_{n-1}\sin\frac{(n-1)m\pi}{n}\right).$$

Im vorliegenden Falle ist $\mathsf{T}(\pi - \sigma) = \mathsf{T}(\sigma)$, d. h. $\mathsf{T}_\nu = \mathsf{T}_{n-\nu}$ und $n = 18$. Da

$$\sin\frac{\nu m\pi}{n} + \sin\frac{(n-\nu)m\pi}{n} = \begin{cases} 0 & \text{für gerades } m, \\ 2\sin\frac{\nu m\pi}{n} & \text{für ungerades } m \end{cases}$$

ist, so kann man die T_ν und $\mathsf{T}_{n-\nu}$ enthaltenden Glieder zusammenfassen. Man erhält (vgl. (15′))

für gerade m: $\qquad B_m = 0,$

für ungerade m:

$$B_m = \tfrac{1}{9}\{2\,\mathsf{T}_1 \sin m\cdot 10^0 + 2\,\mathsf{T}_2 \sin m\cdot 20^0 + \cdots + 2\,\mathsf{T}_8 \sin m\cdot 80^0 + \mathsf{T}_9 \sin m\cdot 90^0\}.$$

Zur Berechnung der Krümmung des Profils und der übrigen geometrischen und kinematischen Elemente der Strömung geht man von den aus

$$\Omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{N} b_n \zeta^{2n+1}$$

sich ergebenden Ausdrücken

$$\mathsf{T}(\sigma) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(2n+1)\sigma, \quad M\,\mathsf{T}(\sigma),$$

$$\Theta(\sigma) = \sum_{n=0}^{N} b_n \cos(2n+1)\sigma, \quad \vartheta(\sigma) = \pm\frac{\pi}{2} - \Theta(\sigma),$$

$$\frac{d\vartheta}{d\sigma} = \sum_{n=0}^{N} b_n (2n+1)\sin(2n+1)\sigma, \quad \log\left|\frac{d\vartheta}{d\sigma}\right|$$

aus, wo M der Modul der Briggischen Logarithmen ist. Diese und die folgenden Formeln gelten allgemein für zur x-Achse symmetrische Profile ohne Ecke im Bug. Die Geschwindigkeitsverteilung $V(\sigma)$ längs

17) Vgl. E. T. Whittaker and G. Robinson, *The calculus of observations*. London 1924, S. 263.

des Profils ergibt sich aus

$$\log V(\sigma) = \log \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2}\right) - \log \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sigma}{2}\right) - M\,\mathsf{T}(\sigma)$$

und mit

$$\log\left|\frac{d\sigma}{d\omega}\right| = \log V(\sigma) - (\log 2 + \log \sin\sigma + \log\cos\sigma)$$

die Krümmung c des Profils als Funktion von σ für von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedene σ aus

$$\log|a^2 c| = \log\left|\frac{d\sigma}{d\omega}\right| + \log\left|\frac{d\vartheta}{d\sigma}\right|.$$

Es seien auch noch die Formeln für $c(0)$ und $c\left(\frac{\pi}{2}\right)$ angemerkt:

$$a^2 c(0) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}{}'(2n+1)^2 b_n,$$

$$\log\left|a^2 c\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \log|-b_0+3b_1-5b_2+\cdots| - M\,|b_0-b_1+b_2-\cdots| - \log 4.$$

Das Profil selbst kann aus (6) und die dem Parameterwert σ entsprechende Bogenlänge aus (7) durch graphische Integration gefunden werden, wenn man beachtet, daß $e^{-\tau} = \frac{1}{V}$ ist. Für die Berechnung der Integranden in (9) ist noch zu erwähnen, daß hier ζ reell mit $-1 \leqq \zeta \leqq 0$ und

$$\omega(\zeta) = -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta^2}\right) - \Omega(\zeta)$$

ist. Damit sind alle zur erfolgreichen Anwendung des geschilderten Verfahrens erforderlichen Hilfsmittel zusammengestellt. Daß schon diese einfache Berechnung des Integrals in (26) zu brauchbaren Näherungen führt, zeigen die folgenden Beispiele, bei denen sich die Näherungslösung $\mathsf{T}(\sigma)$ schon nach wenigen Iterationen ergab. Geht man z. B. von $\mathsf{T}_0(\sigma) = -\frac{1}{2}\sin\sigma$ aus, so ist der Quotient $\frac{\mathsf{T}_0}{\mathsf{T}_1^*}$ so gut konstant gleich 0,21, daß es keinen Sinn hat, weiter als bis zur ersten Iteration T_1 zu gehen. Dieses T_1 führt zu

$$\Omega_1(\zeta) = -0{,}502\,\zeta + 0{,}002\,\zeta^3 + 0{,}001\,\zeta^5,$$

wenn man die Koeffizienten des Sinuspolynoms für T_1 auf drei Dezimalen abrundet. Daß dieses Ω_1 tatsächlich eine Näherungslösung, und zwar eine bessere als $\Omega_0 = -\frac{1}{2}\zeta$, ist, zeigt die Ω_1 entsprechende Krümmung c_1 bzw. der Wert $\lambda_1 = a^2 c_1$. Es ist nämlich λ_1 im Intervall $10^0 \leqq \sigma \leqq 90^0$ gut konstant gleich 0,21 in Übereinstimmung mit dem

Mittelwert des Quotienten $\frac{T_0}{T_1^*}$ und steigt erst in $0^0 \leqq \sigma \leqq 10^0$ bis zum Werte $\lambda_1 = 0{,}23$ für $\sigma = 0^0$ an. Das zu Ω_0 gehörige λ_0 dagegen hat für $\sigma = 0^0$ den Wert $\lambda_0 = 0{,}25$ und für $\sigma = 60^0$ den Wert $\lambda_0 = 0{,}21$.

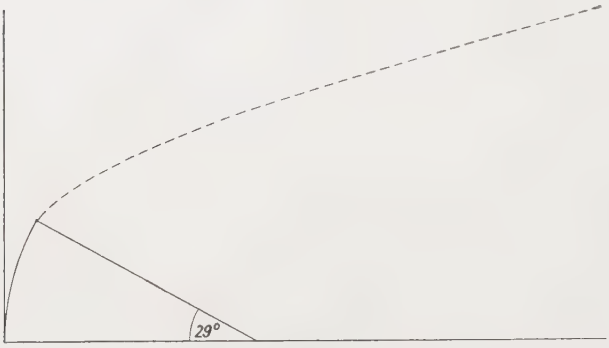

Abb. 4.

Die Differenz dieser beiden Werte ist also doppelt so groß wie die der entsprechenden λ_1-Werte. Im folgenden sollen alle Größen auf den Einheitskreis bezogen werden, es ist hier also $a^2 = 0{,}21$ zu setzen. Druckverteilung p und Geschwindigkeitsverteilung V am Profil sowie Profilkrümmung c zeigen dann als Funktion der vom Bug gemessenen Bogenlänge den in Abb. 5 wiedergegebenen Verlauf. Dabei muß noch erwähnt werden, daß der Druck p_0 im Kielwasser hier wie auch im folgenden gleich 1 gesetzt wurde. Trotz des Anwachsens der Krümmung bei Annäherung an die Ablösungsstelle ist das Profil verhältnismäßig gut kreisbogenförmig, weil dem Parameterintervall $0^0 \leqq \sigma \leqq 10^0$ nur ein kleiner Profilbogen entspricht. Daß sich das Profilende in der Nähe der Ablösungsstelle nicht etwa schneckenförmig aufrollt, lehrt auch der Tangentenwinkel ϑ; denn ϑ hat für $\sigma = 0^0$ den Wert $61^0\,25'$ und für $\sigma = 10^0$ den Wert $61^0\,49'$. Die über der x-Achse gelegene Hälfte des Profils, das übrigens „pflugförmig" ist, ist in Abb. 4 als Kreisbogen vom Radius 1 mit einem Zentriwinkel von rund 29^0 dargestellt. Der Klammerausdruck auf der rechten Seite von (11′) ist für $-1 \leqq \zeta \leqq 0$ positiv, die Krümmung der freien Linien ändert also ihr Vorzeichen nicht, d. h. das Kielwasser ist ständig konvex zur Strömung. Der Widerstand ist $R = 0{,}3701$.

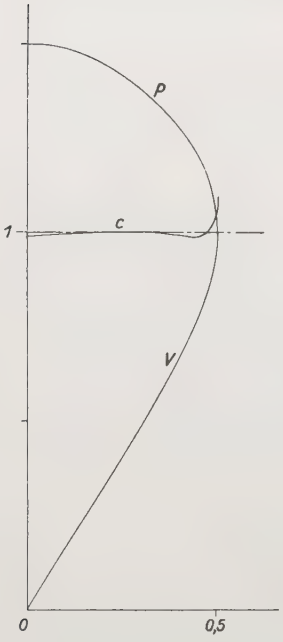

Abb. 5.

Zur ausführlicheren Erläuterung der bei der Anwendung des Verfahrens auftretenden numerischen Verhältnisse ist das folgende Beispiel geeigneter. Aus $T_0(\sigma) = -0{,}8 \sin\sigma$ erhält man hier nach zwei Iterationen (vgl. Tabelle 3) eine Näherungslösung T_2, die

$$\Omega(\zeta) = -0{,}794\,\zeta - 0{,}008\,\zeta^3$$

ergibt. Vom Iterationsverfahren selbst interessiert noch der Anteil des die Unstetigkeit berücksichtigenden Teiles $A_{\mu\mu} e^{T(\mu h)}$ am Gesamtwert $T_1^*(\mu h)$ des Näherungsausdruckes für das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{T(\sigma_1)} K(\sigma_1; \mu h)\, d\sigma_1$. Dieser Anteil wächst von 14% für $\mu = 1$ bis zu 32% für $\mu = 8$. Für $\mu = 9$ beträgt er nur 23%, weil das zu berücksichtigende Intervall nur die halbe Länge der übrigen Teilintervalle hat.

Tabelle 3.

σ	$-T_0$	$-T_1^*$	T_0/T_1^*	$-T_1$	$-T_2^*$	T_1/T_2^*	$-T_2$
10^0	0,139	0,335	0,415	0,143	0,336	0,426	0,143
20^0	0,274	0,654	0,418	0,280	0,656	0,426	0,279
30^0	0,400	0,950	0,421	0,406	0,953	0,426	0,405
40^0	0,514	1,211	0,424	0,518	1,217	0,426	0,517
50^0	0,613	1,431	0,428	0,612	1,440	0,425	0,611
60^0	0,693	1,605	0,432	0,686	1,617	0,424	0,687
70^0	0,752	1,730	0,435	0,739	1,746	0,423	0,742
80^0	0,788	1,806	9,436	0,772	1,825	0,423	0,775
90^0	0,800	1,830	0,437	0,782	1,850	0,423	0,786
			Mittel:			Mittel:	
			0,427			0,425	

Das zu dem gefundenen Ω gehörige λ ist gut konstant gleich 0,42, nur im Intervall $0^0 \leqq \sigma \leqq 10^0$ findet sich auch hier wieder eine etwas stärkere Schwankung, nämlich ein Abfall von 0,43 auf 0,42. Das zugehörige Profil kann mit großer Näherung als Bogen des Einheitskreises mit einem zwischen Bug und Ablösungsstelle gemessenen Öffnungswinkel von etwa 46^0 aufgefaßt werden (Abb. 6), da auch hier der Krümmungsabfall im Intervall $0^0 \leqq \sigma \leqq 10^0$ keinen großen Einfluß auf die Kreisbogenförmigkeit des Profils hat. Druck p, Geschwindigkeit V und Profilkrümmung c sind in Abb. 7 als Funktionen der Bogenlänge wiedergegeben, wobei wieder dem

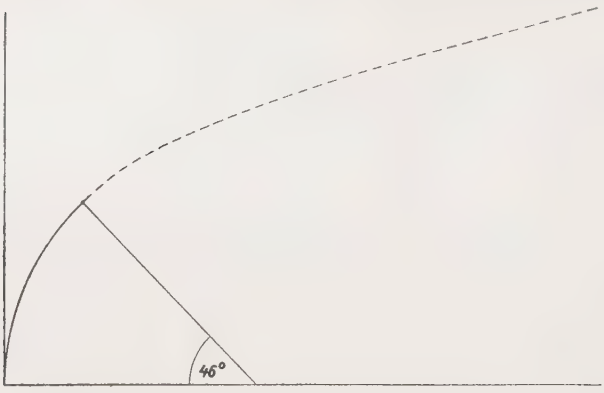

Abb. 6.

Nullpunkt der Bug entspricht. Der Widerstand hat den Wert $R = 0{,}4798$.

Das Kielwasser hat bei dem eben behandelten Profil schon eine Form, die der beim Vollkreis auftretenden sehr ähnlich ist, die Bedingung von BRILLOUIN ist jedoch noch nicht gut erfüllt. Eine Näherungslösung für den Vollkreis erhält man, wenn man von $T_0 = -\sin\sigma$ ausgeht. Dabei verdient das zu T_0 bzw. zu $\Omega_0(\zeta) = -\zeta$ gehörende Ausgangsprofil besondere Beachtung, es ist nämlich das einzige bugförmige unter den Profilen, für die $\Omega(\zeta)$ die Form $\Omega(\zeta) = b_0\zeta$ hat. Da es einem Kreisbogen schon verhältnismäßig nahe kommt, ist es im Sinne der Methode von LEVI-CIVITA das einfachste kreisförmige Profil. Setzt man a^2 gleich 1 und entwickelt man die Exponentialfunktion in (5) in eine Potenzreihe, so erhält man durch gliedweise Integration die Parameterdarstellung des Ω_0 entsprechenden Ausgangsprofils

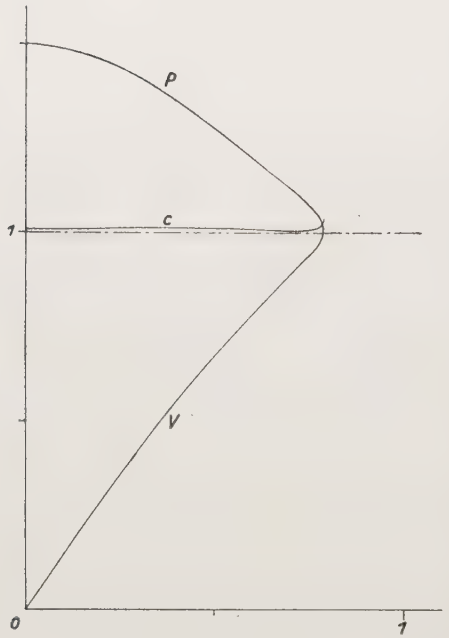

Abb. 7.

$$x(\sigma) = \frac{20693}{48384} - \frac{1}{12}\sin\sigma + \frac{31}{96}\cos 2\sigma + \frac{31}{720}\sin 3\sigma + \frac{169}{5760}\cos 4\sigma$$
$$- \frac{7}{720}\sin 5\sigma - \frac{1}{432}\cos 6\sigma + \frac{1}{2520}\sin 7\sigma + \frac{1}{11520}\cos 8\sigma,$$

$$y(\sigma) = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sigma - \frac{11}{12}\cos\sigma - \frac{17}{96}\sin 2\sigma - \frac{31}{720}\cos 3\sigma + \frac{169}{5760}\sin 4\sigma$$
$$+ \frac{7}{720}\cos 5\sigma - \frac{1}{432}\sin 6\sigma - \frac{1}{2520}\cos 7\sigma + \frac{1}{11520}\sin 8\sigma.$$

Der zum Parameterwert σ gehörige Punkt des Profils liegt in einem Kreis mit dem Mittelpunkt $x(\sigma)$, $y(\sigma)$ und dem Radius 0,005.

Das Iterationsverfahren liefert nach drei Iterationen

$$\Omega_3(\zeta) = -0{,}984\zeta - 0{,}019\zeta^3 - 0{,}002\zeta^5.$$

Für ein bugförmiges Profil muß nun

$$b_0 + 3b_1 + 5b_2 = -1$$

sein. Diese Bedingung ist in der Tat näherungsweise erfüllt, die links stehende Summe ergibt mit den gefundenen Werten der Koeffizienten b_0, b_1, b_2 den Wert $-1{,}051$. Um die Bedingung von Brillouin streng zu erfüllen, benutzen wir zur Bildung des Näherungsprofils die durch 1,051 dividierten Koeffizienten, setzen also

$$\Omega(\zeta) = -0{,}936\zeta - 0{,}018\zeta^3 - 0{,}002\zeta^5.$$

Das diesem Ω zugeordnete λ fällt von 0,57 für $\sigma = 0^0$ auf 0,56 für $\sigma = 90^0$. Das arithmetische Mittel 0,57 der λ-Werte bei $\sigma = 0^0$, $\sigma = 10^0, \ldots, \sigma = 90^0$ unterscheidet sich nicht allzu stark von dem entsprechenden Mittel der Quotienten $\frac{T_2}{T_2^*}$, das den Wert 0,62 hat. Die über der x-Achse gelegene Hälfte des Profils ist ein Bogen des Einheitskreises mit einem Zentriwinkel von etwa 55^0 (Abb. 8). Der Widerstand des Profils und damit auch des Vollkreises ergibt sich zu $R = 0{,}5068$. Bemerkenswert an den (in Abb. 9 ausgezogenen) p- und V-Kurven ist, daß sowohl der Druck als auch die Geschwindigkeit im Gegensatz zu den Verhältnissen bei den beiden vorangehenden Beispielen hier auch mit stetiger Tangente in die Kurve $p = 1$ bzw. $V = 1$ übergehen. Das ist eine Folge der Bedingung von Brillouin. Es ist nämlich

$$\frac{dV}{d\bar{\omega}} = \frac{dV}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\bar{\omega}} = e^{\tau}\frac{d\tau}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\omega}.$$

Nun ist aber (vgl. (7))

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = -\frac{e^{\tau}}{2a^2 \sin\sigma\cos\sigma},$$

also

$$\frac{dV}{d\bar{\omega}} = -\frac{e^{2\tau}}{2a^2\cos\sigma}\frac{\frac{d\tau}{d\sigma}}{\sin\sigma}.$$

Nur wenn $\frac{d\tau}{d\sigma}$ für $\sigma = 0$ den Wert 0 hat, bleibt $\frac{dV}{d\bar{\omega}}$ in der Ablösungsstelle endlich. Das ist aber der Fall, wenn die Bedingung von Brillouin

erfüllt ist; denn dann ist

$$\left(\frac{d\,T}{d\,\sigma}\right)_{\sigma=0} = -1\,,$$

und man hat $\left(\frac{d\,\tau}{d\,\sigma}\right)_{\sigma=0} = \left(\frac{d\,\tau_0}{d\,\sigma}\right)_{\sigma=0} - \left(\frac{d\,T}{d\,\sigma}\right)_{\sigma=0} = 0\,,$

weil auch $\left(\frac{d\,\tau_0}{d\,\sigma}\right)_{\sigma=0} = -1$ ist. Der Quotient $\frac{\frac{d\,\tau}{d\,\sigma}}{\sin\sigma}$ nimmt dann also für $\sigma = 0$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Sein Wert ergibt sich nach den elementaren Regeln der Differentialrechnung für $\sigma = 0$ wegen $\left(\frac{d^2\tau_0}{d\,\sigma^2}\right)_{\sigma=0} = 0$ und $\left(\frac{d^2\,T}{d\,\sigma^2}\right)_{\sigma=0} = 0$ zu Null. Demnach hat man also in der Ablösungsstelle $\frac{d\,V}{d\,\bar{\omega}} = 0$. Daß auch der Druck mit stetiger Tangente in die der freien Linie l_1 bzw. l_2 entsprechende Kurve $\bar{p} = 1$ übergeht, folgt einfach aus

$$\frac{d\,\bar{p}}{d\,\bar{\omega}} = -\,V\,\frac{d\,V}{d\,\bar{\omega}}\,.$$

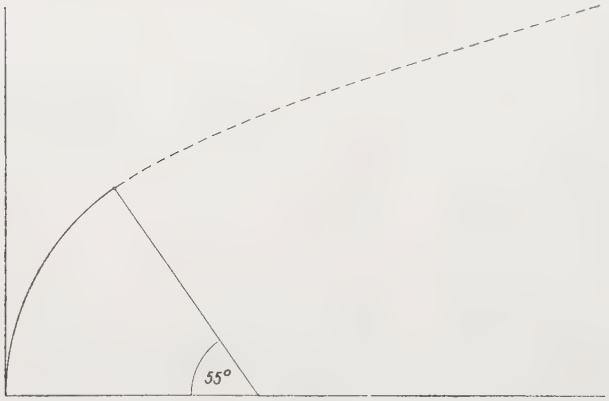

Abb. 8.

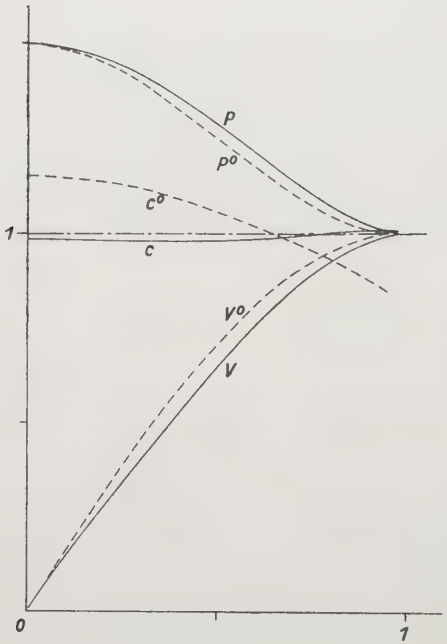

Abb. 9.

Ein Vergleich mit dem Ausgangsprofil ergibt einen interessanten Einblick in die Abhängigkeit des Strömungszustandes vom Profil. In Abb. 9 sind die auf das Ausgangsprofil bezüglichen Kurven gestrichelt eingetragen, und Tabelle 4 gibt noch einmal die Zahlenwerte der Druck- und Geschwindigkeitsverteilung am Profil und der Profilkrümmung als Funktion von σ, wobei sich

der Index o auf das Ausgangsprofil bezieht und für Ω_0 als a^2 der Wert 0,59 gewählt wurde. Als Widerstand des Ausgangsprofils ergibt sich $R = 0{,}4634$. Es zeigt sich also, daß sich die Strömungszustände für beide Profile, übrigens mit Einschluß des Kielwassers, nicht wesentlich voneinander unterscheiden. Eine weitere Annäherung an den Kreis bringt erwartungsgemäß keine bedeutenden Änderungen der Strömung.[18])

Tabelle 4.

σ	c^0	c	p^0	p	V^0	V
0^0	0,85	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00
10^0	0,86	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00
20^0	0,89	1,01	1,01	1,02	0,99	0,98
30^0	0,93	1,00	1,05	1,06	0,95	0,94
40^0	0,98	0,99	1,11	1,13	0,89	0,86
50^0	1,03	0,98	1,19	1,22	0,78	0,75
60^0	1,08	0,98	1,30	1,32	0,64	0,60
70^0	1,12	0,98	1,40	1,41	0,45	0,42
80^0	1,14	0,98	1,47	1,48	0,23	0,22
90^0	1,15	0,98	1,50	1,50	0,00	0,00

Bei den bisher betrachteten Strömungen ist der Betrag V der Geschwindigkeit im ganzen Außenraum höchstens gleich 1, d. h. es ist im Halbkreis der ζ-Ebene überall

$$\tau = \tau_0 - \mathsf{T} \leqq 0.$$

Diese Bedingung ist nach einer Bemerkung von VILLAT[19]) in der Tat überall im Halbkreis erfüllt, wenn sie auf dem Halbkreisbogen $+1, i, -1$ erfüllt ist, weil eine harmonische Funktion τ im Innern ihres Regularitätsbereiches weder ein Maximum noch ein Minimum annehmen kann. Da auf dem Durchmesser -1, $+1$, der den freien Linien entspricht, stets $V = e^{\tau} = 1$ ist, kommen also nur die Werte von V auf dem Halbkreisbogen, d. h. am Profil in Betracht.

Die nun folgenden Näherungslösungen führen zu Strömungen, bei denen die Geschwindigkeit am Profil den Wert 1 übersteigt. So erhält man beispielsweise aus $\mathsf{T}_0(\sigma) = -1{,}1 \sin\sigma$ nach vier Iterationen

$$\Omega(\zeta) = -1{,}079\zeta - 0{,}025\zeta^3 - 0{,}003\zeta^5 - 0{,}001\zeta^7.$$

18) Vgl. C. Schmieden, *Die unstetige Strömung um einen Kreiszylinder*. Ingenieur-Archiv 1 (1930), S. 104—109.

19) A. a. O. [2c]), S. 74.

Das λ dieses Ω liegt zwischen 0,70 und 0,73, das arithmetische Mittel der λ-Werte bei $\sigma = 0^0$, $\sigma = 10^0$, ..., $\sigma = 90^0$ ist auf zwei Dezimalen abgerundet 0,73 und stimmt mit dem entsprechenden Mittel der Quotienten $\frac{T_3}{T_4^*}$ überein. Das zugehörige Profil kann als Kreisbogen mit einem Öffnungswinkel von ungefähr 63^0 angesehen werden. Die Geschwindigkeit am Profil ist im Intervall $90^0 \geqq \sigma \geqq 40^0$ ($0^0 \leqq \Theta \leqq 46^0\,29'$) kleiner als 1, steigt in der Nähe der Ablösungsstelle über 1 ($V = 1{,}04$ für $\sigma = 20^0$, $\Theta = 58^0\,14'$) und sinkt dann auf den Wert 1 zurück, den sie in der Ablösungsstelle erreicht. Bemerkenswert an dieser Strömung ist noch, daß hier das Kielwasser nicht mehr ständig konvex zur Strömung ist. Die Gleichung (11') lautet nämlich für zur x-Achse symmetrisch orientierte $\left(\sigma_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ Profile ohne Ecke im Bug $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

$$c_{l_1} = -\left(\frac{2}{1+\zeta^2} + \frac{d\Omega}{d\zeta}\right)\frac{1}{a^2}\,\frac{2\zeta^3}{1-\zeta^4}.$$

In der Nähe der Ablösungsstelle ($\zeta = -1$) wird aber der Klammerausdruck im vorliegenden Falle negativ, die Krümmung also in der Ablösungsstelle negativ unendlich, weil $\left(\frac{d\Omega}{d\zeta}\right)_{\zeta=-1} = 1{,}176$ ist. Das Kielwasser ist daher in der Nähe der Ablösungsstelle konkav zur Strömung und wird erst in hinreichend großer Entfernung von der Ablösungsstelle konvex.

Als letzte Näherungslösung sei

$$\Omega(\zeta) = -1{,}453\zeta - 0{,}059\zeta^3 - 0{,}010\zeta^5 - 0{,}003\zeta^7 - 0{,}001\zeta^9 - 0{,}001\zeta^{11}$$

angegeben. Man erhält sie aus $T_0(\sigma) = -1{,}5 \sin\sigma$ durch fünf Iterationen. Aus den bei $\sigma = 0^0$, $\sigma = 10^0$, ..., $\sigma = 90^0$ berechneten λ-Werten ergibt sich das Mittel $1{,}33 \pm 0{,}05$, das auch hier noch gut mit dem Mittel $1{,}344 \pm 0{,}003$ der Quotienten $\frac{T_4}{T_5^*}$ übereinstimmt.

Abb. 10 gibt abschließend einen Überblick über die betrachtete Schar der Näherungslösungen $T(\sigma)$. Die gestrichelte Kurve stellt die Funktion $\tau_0(\sigma)$ dar. Man sieht, wie mit wachsendem λ immer größere Stücke der $T(\sigma)$-Kurven unterhalb dieser gestrichelten Linie liegen, d. h. daß für immer größer werdende σ-Intervalle $T(\sigma) < \tau_0(\sigma)$ und damit $V > 1$ wird. Das der Bedingung von BRILLOUIN genügende $T(\sigma)$ ist die letzte Näherungslösung, für die im ganzen Gebiet der Strömung $V \leqq 1$ ist; denn es ist $\tau_0'(0) = -1$ und, wenn die genannte

Bedingung erfüllt ist, auch $T'(0) = -1$. Ist also die Ableitung von T nach σ an der Stelle $\sigma = 0$ kleiner als -1, so muß die T-Kurve wenigstens in der Umgebung des Nullpunktes unterhalb der τ_0-Kurve liegen. Ebenso einfach ergibt sich übrigens auch aus der Darstellung von $T(\sigma)$ als Sinuspolynom, daß für alle betrachteten $T(\sigma)$ die Ableitung nach σ an der Stelle $\sigma = \frac{\pi}{2}$ den Wert Null hat. Für alle $T(\sigma)$

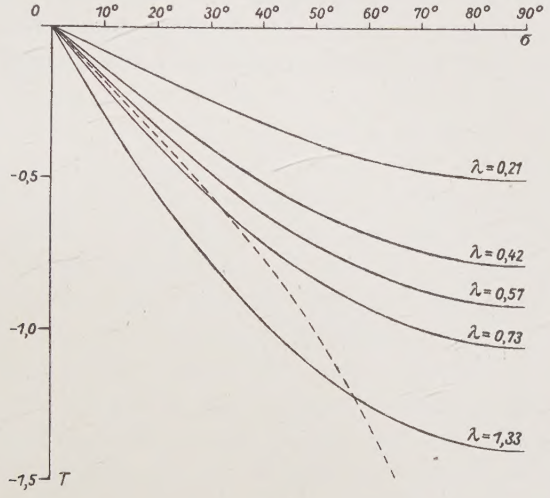

Abb. 10.

besitzen daher die T-Kurven im Punkte $\sigma = \frac{\pi}{2}$ eine waagerechte Tangente. Daß das Maximum von $T(\sigma)$ mit λ gegen Null geht, wurde schon aus der oben gegebenen Abschätzung (29) für $|T|$ gefolgert. Diese Abschätzung zeigt aber noch nicht, daß das Maximum T_{Max} des absoluten Betrages von $T(\sigma)$ mit λ über alle Grenzen wächst, weil die Funktion $\lambda e^{-\lambda W\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ ein endliches Maximum besitzt, das sie für $\lambda = \frac{1}{W\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ annimmt. Daß es aber doch Lösungen von (26) gibt, für die T_{Max} beliebig groß ist, erkennt man einfach so: Wäre für alle Lösungen T_{Max} kleiner als eine feste positive Zahl M, so würde aus

$$\lambda = \frac{-T(\sigma)}{\pi \int_0^2 e^{T(\sigma_1)} K(\sigma_1; \sigma)\, d\sigma_1}$$

folgen $$\lambda < \frac{M}{e^{-M} W(\sigma)}$$

für jeden Wert von σ, also auch für $\sigma = \frac{\pi}{2}$, d. h. es wäre

$$\lambda < \frac{M e^{M}}{W\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

im Widerspruch zu der Tatsache, daß es für jeden Wert von λ eine Lösung gibt. Da man in dieser Abschätzung auch $M = \mathsf{T}_{\mathrm{Max}}$ setzen kann, zeigt sie, daß $\mathsf{T}_{\mathrm{Max}}$ mit wachsendem λ unbegrenzt wächst.

Lebenslauf.

Ich wurde am 3. Oktober 1911 als Sohn des Stadtoberingenieurs Friedrich Schultze und seiner Ehefrau Hedwig geb. Urban in Berlin-Neukölln geboren. Die Familie meines Vaters ist seit dem Ende des 18. Jahrhunderts in Neukölln ansässig. Ich bin evangelisch. Ostern 1918 wurde ich in die Vorschule und Ostern 1921 in die Sexta des Kaiser-Friedrich-Realgymnasiums in Berlin-Neukölln aufgenommen. Dieses Realgymnasium habe ich ohne Unterbrechung bis zur Reifeprüfung Ostern 1930 besucht. Meinen Neigungen folgend, wandte ich mich nach bestandener Reifeprüfung dem Studium der Mathematik, Physik und Chemie zu. Ich studierte von Ostern 1930 bis Ostern 1932 in Berlin, im Sommersemester 1932 in Jena und im folgenden Wintersemester in Heidelberg. Von Heidelberg kehrte ich nach Berlin zurück, wo ich von Ostern 1933 bis zur Exmatrikulation im März 1935 mein Studium fortsetzte und mit der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen, die ich im Februar 1936 bestand, abschloß.

Johann Friedrich Schultze.